好玩的数学

普及版

张景中 主编

吴鹤龄 著

幻方与素数

——娱乐数学两大经典名题

幻方、素数真简单，人人都懂；
幻方、素数不简单，难题重重。
本书带领你遨游神奇的幻方世界和素数世界，去领略杨辉幻方、富兰克林八轮幻圆、印度魔莲花宝座，以及梅森尼素数、完美数、亲和数等的无穷魅力。



科学出版社
www.sciencep.com

编者的话

《好玩的数学》丛书自2004年10月出版以来，受到社会各界广泛好评，各分册先后重印5～7次，平均发行量近25 000套，是近年来国内图书市场上少见的一套叫好又叫座的科普图书。《好玩的数学》丛书从多个角度展示了数学的“好玩”，将现代数学和经典数学中许多看似古怪、实则富有思想哲理的内容最大限度地大众化，努力使读者“知其然”更“知其所以然”；不仅使读者领略到数学的好玩、数学的美，也让读者从中感悟到数学与文学、数学与艺术、数学与文化的交融、汇合；把数学的好玩提升到了相当高雅的层次，让一般读者也能领略数学的博大精深。丛书于2004年获科学时报杯“科学普及与科学文化最佳丛书奖”，2006年又被国家新闻出版总署列为“向全国青少年推荐的百种优秀图书”之一。

为了满足更广泛的读者的需求，我们组织作者对丛书做了一次修订，凝缩了几部书稿的篇幅，删除了部分难度较大的内容，以保证《好玩的数学（普及版)》的内容更加通俗易懂，且每本书的定价都在20元左右，希望能让更多喜欢这套书的读者朋友读得懂、买得起。

《好玩的数学》丛书出版后，主编张景中院士陆续接到了一些科普作家来信，希望能加入撰稿，有些科普作家还给编辑部寄来了自己的得意之作，于是这次修订便补充进来其中优秀

的两种新书（即《进位制与数学游戏》与《古算诗题探源》）。

这套丛书作者的平均年龄超过了70岁，希望在他们的示范和感召下，我国科普事业能新人辈出，创作出更多的优秀作品。

2008年6月

第一版总序

2002年8月在北京举行国际数学家大会（ICM2002）期间，91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词，写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗？不同的人可能有不同的看法。

有人会说，陈省身先生认为数学好玩，因为他是数学大师，他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说，数学枯燥，数学难懂，数学一点也不好玩。

其实，陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩，才兴致勃勃地玩个不停，才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以，小孩子也可能觉得数学好玩。

当然，中学生或小学生能够体会到的数学好玩，和数学家所感受到的数学好玩，是有所不同的。好比象棋，刚入门的棋手觉得有趣，国手大师也觉得有趣，但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味，理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物，很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道：“但得此中味，勿为醒者传。”不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学，要接触数学，或多或少地能理解一些数学。

早在2000多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲

学家老子在《道德经》中说："道生一，一生二，二生三，三生万物。"古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力："庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。"

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是"好玩的数学"题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i}=1$$

这里指数中用到的 π，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第 2 个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 2.718281828459…。指数中用

到的另一个数 i，就是虚数单位，它的平方等于 -1。谁能想到，这 3 个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π》和《不可思议的 e》(此二书尚无学生版——编者注)，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树和教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回　三次方程闹剧获得公式解　神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树和教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》(此次学生版出版时，王教授对原《数学聊斋》一书进行了仔细修订后，将其拆分为《数学聊斋》与《数学志异》二书——编者注)，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师伽德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，

内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自2002年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等40余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献

做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第37节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 1024 − 4 = 1020 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a，b，c，d，e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a=(x+4)/5$$

$$b=4(x+4)/25$$

$$c=16(x+4)/125$$

$$d=64(x+4)/625$$

$$e=256(x+4)/3125$$

e 应为整数，而256不能被5整除，所以 $x+4$ 应是3125的倍数，所以

$$x+4=3125k\ (k\text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时，$x=3121$

答案是，这5个猴子至少摘了3121个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的π》的5.3节，谈到了祖冲之的密率355/113。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分

母不超过113的分数当中，和π最接近的就是355/113。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过336的分数当中，和π最接近的还是355/113。后来，在夏道行教授所著《π和e》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过8000的分数当中，和π最接近的仍然是355/113，大大改进了336这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把8000这个界限提高到16500以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897\cdots$，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$，如果有个分数 q/p 比355/113更接近π，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于355/113，所以 $|355p - 113q|$ 不是0。但它是正整数，大于或等于1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比355/113更接近π，其分母 p 一定大于16586。

如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的22章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到20

世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了20世纪80年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从2点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从3点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。从书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。

张景中

2004年9月9日

第三版说明

本书原名《好玩的数学——娱乐数学经典名题》，科学出版社2003年11月出版。2004年科学出版社将本书列入《好玩的数学》丛书再版，书名改为《幻方及其他——娱乐数学经典名题》。近5年来，本书已5次重印，总印数达24 000册。此次，科学出版社推出《好玩的数学》丛书普及版，本着精简与普及的精神，笔者对原书第二部分做了较大删节，除保留同素数有关的内容外，其他一律割爱，形成目前这样的格局，同时把书名相应改为《幻方与素数——娱乐数学两大经典名题》，希望获得读者的理解和支持。

本书每次重印，笔者都对书稿做了修订和补充。尤其是第四次重印时，修订和补充较多，主要包括：

(1) 我们的祖先发明了世界上最早的幻方，历来都是依据《河图》、《洛书》的传说，加上《大戴礼记》中关于“二九四，七五三，六一八”这一九宫数字的记载，本书也不例外。我国数学史专家梁宗巨先生在其遗作《世界数学通史》中突破了这一框框。他根据1977年在安徽省阜阳县（现改为“阜阳市”）的两座西汉汝阴侯墓中出土的天文仪器“太乙九宫占盘”上的文字，认定其上有一个3阶幻方，从而不但使中国人发明了幻方成为有实物依据的确凿的史实，还使发明的年代比先前的估计提前了两个半世纪！这是幻方研究中一个十分重要而且意义深远的进展。因此我们加入了有关的内容。

(2) 对杨辉的“百子图”，过去很少有人重视。兰州交通大学的黄均迪先生向笔者指出，它其实蕴含着许多特点，富兰克林的神奇幻方很有可能是受杨辉百子图的启发而设计的。笔者赞赏黄均迪先生的发现和观点，增加的内容基本上是他的分析。

(3) 笔者在讨论杨辉的两个4阶幻方为什么一个被叫做“阳图”，另一个被叫做“阴图”时，提出了同阶不同幻方有优劣、高低之分的观点，并通过分析认为阴图在匀称性和美观程度方面优于阳图。最近笔者发现了外国学者以美学观点讨论幻方的资料，虽然其角度和方法同笔者并不一样，但结论却十分相似，值得向读者作介绍。

(4) 在第6章中增加了一节“幻环”。对变形幻方，我们已经介绍了幻圆、幻星、幻矩形、魔蜂窝等较多品种，幻圆中有些其实也就是幻环，为什么还要增补它？原因很简单：2008年北京将举办第29届奥林匹克运动会。在作为奥运标志的五环上玩一些数学游戏，显然是大家所欢迎的，也是我们宣传奥运、服务奥运的一种表示。

(5) 在对泛对角线幻方的讨论中，原先只简单地提到“所有单偶数阶幻方不可能是泛对角线幻方”，但没有给出证明。笔者后来了解到，如何证明它曾经困扰了我国几代幻方研究者，许多人为此付出了巨大的心血和精力，直到21世纪初才有人破解了这一“难题”，并将论文发表在某著名高校的学报上。实际上，这个问题早在1919年就由普朗克解决了，我国学者的证明方法和普朗克的方法是一样的。为了从这件事中吸取教训，今后避免出现类似现象，我们对此加入了必要的介绍。

(6) 在5.4节中增加了奇数阶乘幻方的一般构造方法，在7.4节中补充介绍了一个魔三角。

此外，在素数研究方面，近年来进展很大，不断有新的、更大的梅森素数、回文素数、孪生素数等被挖掘出来。我们都根据最新资料对相关内容进行了更新，以体现与时俱进的精神。

本书出版以来，受到广大读者的厚爱。笔者不断收到来自全国各省市（包括宝岛台湾）、各年龄段的许多读者的来信，他们或与笔者交流心得、讨论问题、交换资料，或向笔者提出批评建议，这使笔者至深感荷。许多修订和补充就是根据或参考读者的意见进行的。借着普及版出版的机会，笔者向所有关心、爱护本书的读者表示深深的谢意。

吴鹤龄

2008年初

第二版说明

本书原名《好玩的数学——娱乐数学经典名题》，由科学出版社于2003年11月推出后，颇受读者欢迎，2004年被国家新闻出版总署列为向全国青少年推荐的100本优秀读物之一。此次科学出版社将本书列入《好玩的数学》丛书重新出版，并将书名改为《幻方及其他——娱乐数学经典名题》。借改版之机，笔者除对原书中少量粗心错误、排印错误作了改正之外，还增补了一些材料。现作几点说明：

(1) 原书前言中，有一段引言："在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。"笔者误把它写成是加拿大生理学家汉斯·赛耶说的，其实是大科学家爱因斯坦说的。这一张冠李戴的错误是由于笔者没有认真核实，因而以讹传讹。笔者当引为深刻的教训，并向读者致歉。

(2) 由于类似原因，笔者根据上海陆家嘴陆深墓中出土的玉挂幻方，断言："至少在16世纪，中国人已经会构造泛对角线幻方了"。其实，这个玉挂幻方同安西王府遗址中出土的铁板幻方相似，用的是古阿拉伯数字，因此不能作为中国人在泛对角线幻方上的成就的证明。感谢兰州交通大学的黄均迪先

生来信指出这一点（原书中的一些粗心错误、排印错误也是他发现的）。

(3) 原书前言中说，对杨辉的两幅4阶幻方，“为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，历来没有人探讨过这个问题。”笔者后来发现，曾经三度与李约瑟合作编写《中国科学技术史》，李约瑟去世后出任剑桥李约瑟研究所所长的著名科技史专家何丙郁先生在“从科技史观点谈易数”一文（见《何丙郁中国科技史论集》，辽宁教育出版社，2001）中提到过这个问题，现照录如下：

“衍数图同时是一个魔方阵，纵、横、斜七个数字相加都是一百七十五。图后附有阴图，具有相似的特色，可能是由于右上角的数字从奇数改为偶数，故称阴图，符合易数中阴阳两仪的用义。易数图是由一至六十四，代表六十四卦的数字组成。这是一个魔方阵，纵、横、斜八子相加都得数二百六十。此图亦附有阴图，右上角的数字从奇数改为偶数。”

何先生文中的魔方阵就是幻方。由此可见，何先生已经注意到杨辉幻方有阴、阳两图，并发表了自己的看法。但从行文看，何先生对此问题并未给予充分重视，也未作深入讨论；根据右上角数字之奇、偶而定阳、阴图之说也经不起推敲，因为除杨辉的4、5、7、8阶幻方的阴阳图符合何先生指出的规律外，杨辉6阶幻方的阴、阳两图右上角都是偶数。但无论如何，笔者原先“历来没有人探讨过这个问题”的论断显然是偏颇的，因此改版中作了相应修正。

笔者不是学数学、搞数学的，对数学研究的进展情况缺乏全面了解。因此在原书取材方面，对我国当今学者在幻方研究上的建树毫无反映。原书出版后，中国幻方研究者协会的许多

会员给笔者寄来了他们的论著，其中有高难度的多重幻方、素数幻方，等等，使笔者大开眼界。改版中，我们把12阶三次幻方和2个巧妙的素数幻方介绍给大家。更多精彩的幻方，笔者推荐以下几部作品：

高治源，九宫图探秘，2004。

张道鑫，素数幻方，2003。

李抗强，趣味数学幻方，2002。

林正禄，开拓智力的奇方——幻方，2001。

以上几部专著都由香港天马图书有限公司正式出版发行，国家图书馆有收藏，幻方爱好者可以阅读。

吴鹤龄

2004年秋初于北京

第一版前言

本书名曰《好玩的数学——娱乐数学经典名题》。也许不少读者在看到这个书名后会提出质疑：作为科学的数学怎么是供玩儿的，而且“好玩”呢？“娱乐数学”又从何说起，过去从来也没有听说过啊！对这些问题，我们长话短说，作一个简要的回答。

“好玩的数学”这个命名源于陈省身教授为2002年在北京举行的第24届国际数学家大会期间举办的“少年数学论坛”的题词“数学好玩”。陈省身教授是著名的华裔数学家，他因在整体微分几何学方面的出色成就而荣获“国际数学界的诺贝尔奖”的大奖——沃尔夫奖（1984年），是世界一流的大数学家。他说“数学好玩”，自然是不会有错的。笔者体会，之所以说“ 数学好玩”，恐怕主要有两个原因：一是数学中有许许多多奇特而有趣的现象，二是数学中有许许多多未解之谜。正是这些奇特而有趣的现象和未解之谜吸引着广大的人群，使他们成为数学的爱好者和探索者，其中一些人有所发现，有所发明，有所创造，成了专家、学者，推动了科学的发展和人类社会的进步。20世纪最伟大的科学家之一、诺贝尔奖获得者爱因斯坦曾经深刻地指出：“在人们能够体验到的种种感觉中，最美好的就是神秘玄妙感。它是真正科学的摇篮。一个人如果不知道这种感觉为何物，如果不再体验到惊诧，如果不再觉得惶惑，那他就不如说已经死去了。真正的科学家永

远不会丧失自己感到惊讶的能力，因为这是他们之所以成为科学家的根本。”数学家斯坦因（Sherman K. Stein）在《数字的力量——揭示日常生活中数学的乐趣和威力》(吉林人民出版社，2000)中也写道：“按照一条老的拉丁格言，‘需要为发明之母’，但是，‘好奇为发明之母’同样也是对的。”他举了一个例子：19世纪初法拉第探索电与磁，就不是因为需要，而是出于对宇宙本质的好奇心。当有人问法拉第，你研究这些有什么用时，他反问道：“一个新生婴儿有什么用？”有这样一种说法：一些重大的科学发现和发明创造是“玩”出来的。这听起来似乎令人难以置信，却是事实。因此，说“数学好玩”，不是对数学的贬低，也不是否认数学的高度抽象性和极大困难性，而只是突出其引人入胜的另一面，旨在激发人们的兴趣，热爱它，研究它，到神秘的数学王国中去遨游、去探索。

既然“数学好玩”，数学中好玩的那些内容被称之为“娱乐数学”也就顺理成章了。娱乐数学在英文中叫做 Recreational Mathematics，或者叫 Entertainment in Mathematics。据哥伦比亚大学专门从事数学教育研究的威廉·夏夫博士（William Leonard Schaaf）考证，娱乐数学已有2000多年的历史，在阿基米德时代就已经有了，到11世纪已有娱乐数学的专著出版。他在20世纪50年代编了一本《娱乐数学文献指南》(Recreational Mathematics: A Guide to the Literatures, National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1958)，收录的娱乐数学重要文献有5000多种，后来他又编了一套《娱乐数学书目》(A Bibliography of Recreational Mathematics)，由美国数学会出版，有3卷之多。著名的科普杂志《科学美国人》(Scientific Ameri-

can）在20世纪下半叶由著名的娱乐数学专家马丁·加德纳（Martin Gardner）办了一个“数学游戏”(Mathematical Games）专栏，大受读者欢迎，持续了近30年。到80年代中期，一则因加德纳退休，二则因个人电脑的兴起，这个专栏被改为“计算机娱乐”（Computer Recreation）专栏，但不久就又改为“数学娱乐”（Mathematical Recreation）专栏。现在,《科学美国人》每期都有这个栏目，是这个杂志最受读者欢迎的“保留栏目”。

在我国，也已出版了不少“趣味数学”、“数学游戏”这类专著和读物，娱乐数学的一些世界名著也被译成中文介绍给我国读者。但是由于种种原因，数学的这块园地在我国始终没有和“娱乐”这个词直接挂起钩来，因此，在我国读者中就没有“娱乐数学”这个概念。就笔者所见，只有亨特(J. A. H. Hunter）的名著《Mathematical Diversions》的中译本被冠以《数学娱乐问题》的书名出版，大概见过此书的读者不多。笔者认为，现在该是娱乐数学“闪亮登场”的时候了。如同劳动和受教育是每个公民的权利一样，休息和娱乐也是公民的基本权利，而娱乐的形式是多种多样的。通过“玩数学”达到娱乐的目的，同时又提高了科学素养，增长了知识，真是两全其美，何乐而不为，有什么理由不大力提倡呢？

本书分两部分。第一部分介绍百变幻方——娱乐数学第一名题。幻方是几千年前中国人首先发现的，后来传到世界各地，引起广泛兴趣。幻方是简单得人人可以理解的数学现象，但是它又蕴含着许多至今无人能够回答的问题，包括利用强大的计算机目前仍然解决不了的问题，因而自然成了娱乐数学中最受人关注的一个课题。本书对古今中外在幻方研究中的成果

和发现有详尽的介绍，仅幻方构造法就列举了10多种，既包括传统的连续摆数法、阶梯法、对角线法、镶边法等，又有近代数学家最近才开发出来的LUX法、相乘法等，对于绝大多数读者来说都是耳目一新的。美国建国前后的大政治家、大发明家本杰明·富兰克林推出了许多神奇的幻方、幻圆，其中的8轮幻圆（他自己称之为“magic circle of circles”）中，又含有4组偏心的同心圆。百多年来的中外文献中，对这4组偏心的同心圆在8轮幻圆中到底起什么作用，都没有明确的说明。笔者经过反复查证，终于在200多年前出版的一部科学辞典中找到了答案，首次给读者提供了准确的解释。南宋的杨辉是世界上系统研究幻方的第一人。他给出的4阶至8阶幻方各有阴、阳两图。同为4阶幻方，为什么把这幅称为阳图，把那幅称为阴图而不是相反，几乎没有人认真探讨过这个问题。笔者注意到这个问题，并进行了初步的探讨，认为幻方是有优劣、高低之分的，并提出了判别的依据，由此给出了对杨辉4阶幻方阴、阳两图的一种可能解释。笔者不敢断言自己的观点和方法一定是正确的，只希望这一讨论能成为引玉之砖，把对有关问题的研究引向深入。

本书第二部分是娱乐数学其他经典名题，包括数字哑谜(也就是算式复原，诸如冷战时期出现的USA + USSR = PEACE)、数学金字塔、素数、NIM游戏，还有数论中的完美数、自守数、累进可除数、用尽1~9表示任意整数，以及所谓“数学黑洞”和棋盘上的哈密顿回路、八皇后问题、约瑟夫斯问题（也就是幸存者问题）、重排九宫、梵塔等，内容十分广泛，问题十分有趣。笔者在充分发掘娱乐数学的历史遗产的同时，又十分重视当今的科技进步，用最新材料充实了经典名题

的内涵。例如，素数是一个十分古老的课题，本书有两章是涉及素数的，其中不乏经典的问题，如梅森素数。本书在介绍梅森素数部分，笔触从16世纪的大数学家梅森一直伸展到本世纪初的网民志愿者组织GIMPS（全球因特网梅森素数大寻找），全景式地向读者展现了历代数学家和数学爱好者在挖掘最大素数方面的历程，全面介绍了从手工计算到计算机计算，从巨型机计算到网络计算至今所获得的全部44个梅森素数，比较充分地反映了在计算机技术尤其是网络技术飞速发展、网络应用日益普及的情况下，有关娱乐数学研究所呈现出的日新月异的景象。

本书是在笔者近10年来所写作的数学小品的基础上，经过重新整理、修订和增补而成的。这些数学小品有些在《知识就是力量》等刊物上公开发表过；有些虽然没有发表过，但在笔者任教的北京理工大学科协所组织的科普讲座上向大学生们演讲过。笔者不是数学工作者，笔者从事的专业是计算机，涉足娱乐数学这一领域一是出于个人爱好，二是出于专业教学的需要，因为笔者发现，用娱乐数学中的有趣问题作程序设计的例题与习题，可以大大激发学生的学习热情与积极性。但由于不是本行，书中难免有错误、疏漏或“说外行话”之处，恳请专家和读者批评、指正。此外，本书引用了大量中外文的书刊和网上资料，多数注明了出处，但因为本书毕竟不是学术专著而是科普作品，因此笔者没有刻意追求逐一注明材料来源，这是需要说明的。

吴鹤龄
2003年初春于北京

目　　录

第一部分　百变幻方
——娱乐数学第一名题

本书分两大部分，第一部分专门介绍幻方，第二部分介绍素数。把幻方作为一个专题着重加以介绍，并非完全是由于笔者的偏爱，更主要的是因为幻方在娱乐数学中的地位以及它的意义实在非同一般，也因为幻方是中国人的首创，是值得中国人骄傲的。赖塞（H. J. Ryser）的名著《组合数学》（Combinatorial Mathematics）（MAA，1962）开宗明义地写道："组合数学，也称为组合分析或组合学，是一门起源于古代的数学学科。据传说，中国的大禹（约公元前2200年）在一只神龟的背上看到如下幻方

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

而大约公元前1100年，排列即已在中国开始萌芽……"

幻方从中国传到世界其他地区以后，引起广泛的重视，一代又一代的学者对它进行不懈的研究，取得了许多成果，有关的文献资料多不胜举。数学家詹姆士·纽曼（James Roy Newman，1907～1966）在20世纪50年代编辑了一部数学文库性质的《数学世界》（The World of Mathematics，Tempus Books，1956），收集了数学各个分支、各个年代的名家名篇133篇，分4大卷出版。在"数学游戏与数学谜语"这部分的开头，纽曼在介绍中提到幻方时就写道："单单是有关幻方的著作就足够办一个规模可观的图书馆了（The writings on magic squares alone suffice to make a fair-sized library）。"读者在看过本书以后当会相信纽曼的这个说法是一点也不过分的，笔者专用一部分介绍幻方也是有道理的。

引子　洛水神龟献奇图

公元前2200年，也就是距今4300年左右，在我们中华民族祖先居住的大地上，发生了暴雨连绵、洪水泛滥、成千上万的人遭到没顶之灾的大悲剧。当时人类抵御自然灾害的能力十分有限。在拯救自身生命的强烈愿望驱使下，人们奋起抗灾，在斗争和失败中学习，涌现出了许多可歌可泣的故事，其中大家最熟悉的是大禹为治水三过家门而不入的事迹。在大禹治水的过程中，还有许多美丽、动人的传说。例如，相传大禹在治黄河的时候，黄河龙马献给大禹一张河图，从而帮助大禹制定了一套正确的治黄方案。另一则传说是大禹在治洛水的时候，洛水神龟献给大禹一本洛书，书中有如图0-1所示的一幅奇怪的图。这幅图用今天的数学符号翻译出来，就是一个3阶幻方，也就是在3×3的方阵中填入1~9，其每行、每列和2条对角线上3个数字之和都相等，等于15，并把它叫做幻方常数（magic square constant）或幻和（magic sum）。这就是中国人首先发现的世界第一个幻方。别小看了这个小小的幻方，这是中国人在数学上的一个伟大创造，它奠定了数学中一个重要分支——组合学的基础。当然，由于当时还没有发明我们今天所使用的数字符号，所以我们的祖先就巧妙地用这个图来表达他们所知道的幻方。图中，奇数用若干个空心的圆圈表示，偶数用若干个实心的圆圈表示，这和中国古时的阴阳学说有关。

由于作为洛书3阶幻方基础的九宫数字“二九四，七五三，六一八”在公元80年出版的古书《大戴礼记》卷八《明堂篇》中就有清清楚楚的记载，因此，中国人首先发现了幻方，是国际数学界公认的。但是，幻方到底是什么时候出现的，有没有实物为证？这个问题却长期得不到解决，直到20世纪70年代的一个考古发现才最终给出了答案。

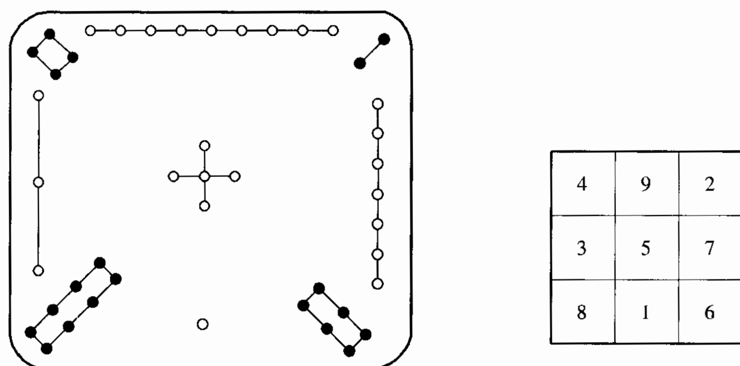
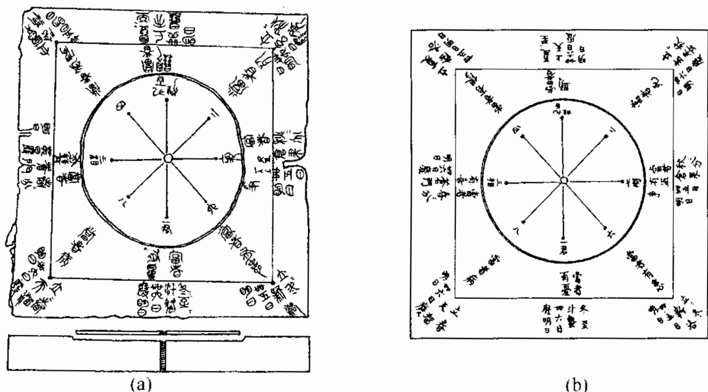


图 0-1 洛书上的 3 阶幻方

1977 年春，安徽省阜阳县（现改为“阜阳市”）城郊的农民在双古堆平整土地时，发现了两座古墓。文物工作者发掘后证明这是西汉汝阴侯的墓葬。汝阴侯是汉高帝刘邦对其同乡的功臣夏侯婴的封号。墓主人是第二代汝阴侯夏侯灶及其妻子。据史书记载，夏侯灶死于汉文帝 15 年，即公元前 165 年，距今已 2170 多年。出土文物中包括 3 件极为珍贵的中国古代天文仪器，其中一件叫“太乙九宫占盘”，是用来占卦的盘，分上盘和下盘两部分，上盘嵌入下盘的凹槽，可以随意转动，如图 0-2（a）所示。将盘上的古汉字转写成现代汉字以后如图 0-2（b）。由图可见，太乙九宫占盘正面是按八卦位置和金、木、水、火、土五行属性排列的，其九宫名称和各宫节气的天数与古书《灵枢经》（这是《黄帝内经》的重要组成部分，是中国最早研究天气变化与人体关系，以占风候，治疾病的古书）完全一致。这个占盘就是用来测算立春、春分、立夏、夏至、立秋、秋分、立冬、冬至这 8 个节气的，说明我们的祖先很早就掌握了季节变化的规律，这里我们不加详述，感兴趣的读者可参阅《考古》1978 年 5 月号上殷滌非的文章“西汉汝阴侯墓出土的占盘和天文仪器”。我们感兴趣的是盘上圆圈中 8 个方位上的数字如果补上中心因安装转轴而无法刻上的“5”的话，恰为九宫数字“四九二，三五七，八一六”！因此，我国数学史专家梁宗巨先生在其遗作《世界数



(a) (b)

图 0-2 太乙九宫占盘

学通史》（辽宁教育出版社，2005）中认定这是一个 3 阶幻方的实物。根据盘上刻的该盘的制作年代“第三七年辛酉目中冬至”的字样，专家已确切地考证出这是汉文帝 7 年（也就是公元前 173 年），因此幻方在中国的出现已有 2180 年以上的历史，比根据《大戴礼记》的推算提前了两个半世纪（但不知什么原因，梁先生书上只说提前了一个半世纪）。幻方后来陆续传播到日本、朝鲜、印度、泰国、阿拉伯等地，引起广泛兴趣和重视。但根据史料记载，国外最早研究幻方的学者当推阿拉伯的塔比·伊本·夸儿拉（Thabitibn Qurrah，826 ~ 901），那已是公元 9 世纪了。至于欧洲人知道幻方就更晚了，据信是生于康斯坦丁诺普尔（Constantinople）的印度人穆晓普鲁斯（Manuel Moschopulus）首先在 15 世纪把幻方介绍到欧洲去的。

在中国古代，洛书 3 阶幻方被蒙上了一层厚厚的神秘色彩。周朝的易学家把它同“九宫说”等同起来（九宫指乾、坎、艮、震、巽、离、坤、兑八卦之宫，外加中央之宫，合称九宫），或者把它同他们所主张的“天地生成数说”联系起来（天数指奇数 1、3、5、7、9，表阳、乾、天等；地数指 2、4、6、8，表阴、坤、地等）。而两汉时的巫师或方士则把它用作占卜吉凶的图谶。在我国西藏地区，过去藏民普遍携带



图 0-3 藏民的护身符

的一种护身符如图 0-3 所示，除了有黄道十二宫和八卦以外，中央就是一个用藏文数字表示的 3 阶幻方。此外，初版于 1923 年的《数学史》(D. E. Smith：History of Mathematics) 中，转载了拉萨出版物中一幅名为“生命之轮”(Wheel of Life) 的画，如图 0-4 所示，也有类似的，但宗教色彩更浓厚，内容更丰富的图案，其中央也是一个 3 阶幻方。另一方面，由于洛书 3 阶幻方配置 9 个数字的均衡性和完美性，产生了极大的审美效果，使古人认为其中包含了某种至高无上的原则，也把它作为治国安民九类大法的模式，或把它视为举行国事大典的明堂的格局，因此使中国古人的这一数学杰作，具有了哲学意义的创造。

事实上，隐藏在洛书 3 阶幻方背后，还可能有许多奥秘有待人们去挖掘。我国著名的科普作家兼娱乐数学专家谈祥柏先生就曾在他的著作中介绍了有关对洛书 3 阶幻方的新发现。首先是把幻方想像为画在汽车轮胎上，于是，最左一列与最右一列相邻，最上一行与最下一行也相

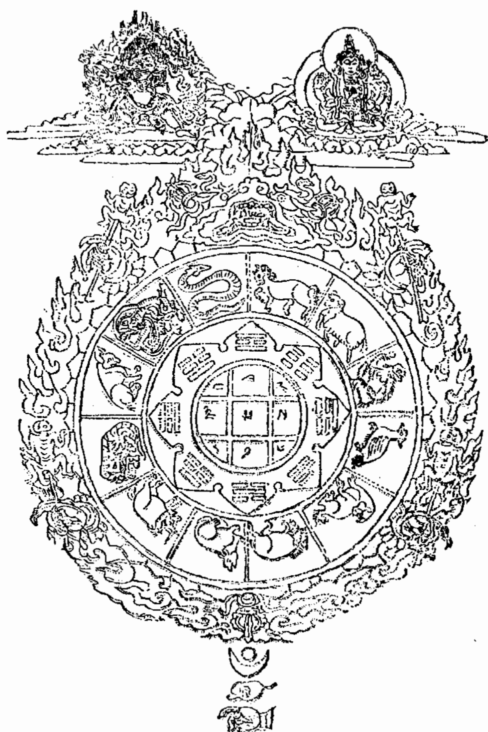


图 0-4 “生命之轮”

邻。这时，9 个 2×2 方阵中的 4 数之和恰好从 16 到 24，既不重复也不遗漏，如图 0-5 所示。你说奇不奇？

其次，把每列数字看成一个 3 位数，则此 3 个 3 位数之和与其 3 个逆转 3 位数之和相等，而且取它们的平方和也相等，即

$$276+951+438=672+159+834=1665$$

$$276^2+951^2+438^2=672^2+159^2+834^2=1172421$$

不仅如此，这种性质对行来说也成立，即

$$492+357+816=294+753+618=1665$$

$$492^2+357^2+816^2=294^2+753^2+618^2=1035369$$

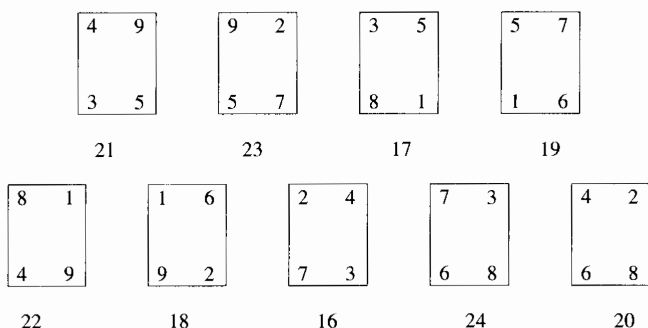


图 0-5　洛书 3 阶幻方 9 个 2×2 方阵形成连续数列

更有甚者，如果我们把对角线也分成两族，自左上角到右下角的主对角线及与它平行的两条折对角线称为主族，反方向的对角线称为副族，则上述奇妙性质依然成立，即

主对角线族：$654+798+213=456+897+312=1665$

$$654^2+798^2+213^2=456^2+897^2+312^2=1109889$$

副对角线族：$258+714+693=852+417+396=1665$

$$258^2+714^2+693^2=852^2+417^2+396^2=1056609$$

在谈先生介绍的上述发现的启发下，笔者发现，在把每行、每列和每条主对角线上的 3 个数当做一个 3 位数正读和反读的情况下，洛书 3 阶幻方还有如下奇异性质，即幻方中间一行、中间一列、两条主对角线所形成的数正读和反读相加之和都等于 1110，而第 1、第 3 两行数和第 1、第 3 两列数以及主、副两条折对角线正读和反读之和折半也等于 1110

第 2 行：　$357+753=1110$

第 2 列：　$951+159=1110$

对角线：　$258+852=1110$

$456+654=1110$

第 1、3 行：$\frac{1}{2}[(492+294)+(816+618)]=1110$

第1、3列：$\frac{1}{2}[(438+834)+(276+672)]=1110$

主折对角线：$\frac{1}{2}[(231+132)+(978+879)]=1110$

副折对角线：$\frac{1}{2}[(471+174)+(936+639)]=1110$

大家看奇不奇？因此我们完全有理由在通常的幻方常数15之外，为洛书3阶幻方定义第2个特殊的幻方常数1110，而且它同15一样，有8个之多。由此可见，洛书3阶幻方不但在配置9个数字上非常均衡和对称，因此非常和谐和美丽，在把行、列看做一个整体的情况下，其数字的配置也非常均衡和对称，非常和谐和美丽。

另外，我们把洛书3阶幻方中的各元素都取平方，看看它出现什么情况。当然，由于它不是双幻方（doubly magic square 或 bi-magic square，见后），因此不会出现各行、各列及2条主对角线上元素之和仍都相等的奇迹（已经证明，这样的双幻方至少要有8阶），但我们依然可以看到某些奇妙之处。我们先列出各行、列、对角线的情况

行：　$4^2+9^2+2^2=101$

　　$3^2+5^2+7^2=83$

　　$8^2+1^2+6^2=101$

列：　$4^2+3^2+8^2=89$

　　$9^2+5^2+1^2=107$

　　$2^2+7^2+6^2=89$

主对角线：　$4^2+5^2+6^2=77$

　　$2^2+5^2+8^2=93$

折对角线：　$2^2+3^2+1^2=14$

　　$9^2+7^2+8^2=194$

　　$4^2+7^2+1^2=66$

　　$9^3+3^2+6^2=126$

仔细分析一下，就可看出，除了第1行和第3行上的3数和相等，

第 1 列和第 3 列上的 3 数和也相等外，它们的组合又可产生 5 个常数 190，即：

第 1 行和第 1 列：101 +89 =190

第 1 行和第 3 列：101 +89 =190

第 3 行和第 1 列：101 +89 =190

第 3 行和第 3 列：101 +89 =190

第 2 行和第 2 列：83 +107 =190

由此可见，洛书 3 阶幻方在把各元素取平方以后虽然不能形成新的幻方而具有全面对称、均衡的特性，但大体上也是平衡的。我们还注意到，各元素取平方以后，如果只考察其个位数，那么所形成的 3 阶方阵如图 0-6 所示，也表现出很鲜明的特点：

6	1	4
9	5	9
4	1	6

图 0-6　洛书 3 阶幻方取平方后舍弃拾位数形成的方阵

第 1 行和第 3 行（614，416），第 1 列和第 3 列（694，496），主折对角线族（491，194），副折对角线族（691，196）的 2 个数分别是互逆转数；而第 2 行（959）、第 2 列（151）、2 条主对角线（656 和 454）上的数又都是回文数（palindrome，即正读和反读是一样的数），不是也十分奇特吗？

谈先生本人也有一个发现。他把洛书 3 阶幻方看做行列式并算出其值

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 120 + 504 + 6 - 80 - 28 - 162 = 360$$

由于这个值乃是一个非零常数，故可通过代数余因子的计算，相继求出其伴随矩阵与逆矩阵，最后可得出洛书方阵的逆矩阵

$$\frac{1}{360}\begin{bmatrix} 23 & -52 & 53 \\ 38 & 8 & -22 \\ -37 & 68 & -7 \end{bmatrix}$$

把公因子$\frac{1}{360}$提出后，右边 3 阶方阵的 9 个元素为

$$-52,\ -37,\ -22,\ -7,\ 8,\ 23,\ 38,\ 53,\ 68$$

它们正好构成公差 $d=15$，$S=72$ 的算术级数，而公差 15 恰恰就是洛书 3 阶幻方的幻和。而如果把$\frac{1}{360}$也考虑进去，则这个逆矩阵的各元素之和为$\frac{1}{360}\times 72=\frac{1}{5}$，恰是洛书 3 阶幻方中心数 5 的倒数。因此，谈先生把这个洛书的“影子”命名为“反洛书”。

洛书 3 阶幻方只是我们的一个引子。下面我们将介绍有关幻方的方方面面问题，都是妙趣横生的，相信会引起读者的兴趣。

1 有关幻方的传闻趣事

所谓幻方（magic square），也叫纵横图，就是在 $n \times n$ 的方阵中，放入从 1 开始的 n^2 个自然数；在一定的布局下，其各行、各列和两条对角线上的数字之和正好都相等。这个和数就叫“幻方常数”或“幻和”。显然，对于任意 n 阶的幻方来说，其幻方常数 S 和方阵阶数 n 的关系是

$$S=\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

例如 3 阶的幻方常数是 15，4 阶的幻方常数是 34，5 阶的幻方常数是 65 ……

由于幻方具有这种奇特性质，几千年来吸引着许多数学家和数学爱好者的兴趣，进行了广泛深入的研究。到目前为止，已经发现了幻方的一些规律，解决了有关幻方的一些问题。但有关幻方的未解之谜仍然不少。在详细讨论有关知识和问题之前，我们先介绍与幻方有关的一些传闻趣事。

1.1 宇宙飞船上的搭载物

1977 年，美国先后发射了旅行者 1 号和旅行者 2 号宇宙飞船。这两艘飞往茫茫太空的飞船，负有探索宇宙秘密的重大使命。其中一项使命就是寻找“外星人”，与外星人建立联系。

长久以来，人们就相信，除了地球以外，在别的星球上也可能有生命存在，甚至有比人还要发达的高级生物存在。地球上的无线电台有时会从太空中接收到一些莫名其妙、难以破译的电波，有人认为是外星人发来的联络信号。众说纷纭、千奇百怪的不明飞行物——UFO 的出现与消逝，也为外星人的存在及其活动提供了一些佐证。当然了，发现与寻找外星人，与外星人建立联系，就成了许多科学家追求的目标，也是人

类的一个共同愿望。

但是，要寻找外星人谈何容易。外星人生存的星球所在的银河系可能与地球相隔“十万八千光年”（这里只是借用“十万八千里”的说法，在宇宙中，十万八千光年只算是一个很小的距离），真是“牛郎织女难相会”。地理位置遥远是寻找外星人的一个很大的障碍。这个障碍由于宇宙航行技术的进步正在逐步被克服。

另一个大障碍是如何与外星人沟通信息。外星人如果果真存在，其形态必定与人类不同，其“语言”也必然与人类不同——地球上的人还说着各种各样极不相同的语言呢。在这种情况下，不采取一定的办法，很可能遇到外星人也“见面不相识”，即使“擦肩而过”，仍然“失之交臂”，那就“千里迢迢”而“前功尽弃”了。

美国宇航局的官员们为这个问题大伤脑筋。在无可奈何之中，他们向全世界公开征集旅行者 1 号和 2 号用以与外星人沟通信息的搭载物。消息传出以后，世界各国的人们纷纷献计献策，出了形形色色的主意。最后，美国宇航局采纳了其中的一些建议，搭载物中除了包括绘有男、女人体形态的金属片，以便向外星人表示自己的身份，让外星人知道“来者是谁”以外，还包括绘有代表人类文明的一些重大发明、发现的图案的金属片。其中，代表人类在数学方面的知识和成就的，一个是勾股弦，另一个就是 4 阶幻方。而且，为了让外星人看明白这是一个幻方，采用了与洛书上的 3 阶幻方相同的办法，即用一个小圆圈表示 1，用 2 个小圆圈表示 2……这样，“仿古幻方”就随同旅行者 1 号和 2 号奔向茫茫太空，作为人类的使者寻找外星人去了。

1.2 南宋杨辉——研究幻方第一人

由于古时信息交流的极不方便和科学技术的不够发达，我们的祖先在发现 3 阶幻方以后的数千年中，对它的研究处于长期停滞状态，没有进一步的发展。但这种状况到南宋有了突破。在南宋（1127 ~ 1279）短

短150多年的历史上，在政治军事方面，有大义凛然、抗拒外侮的岳飞、文天祥；在文艺方面，有陆游、辛弃疾、李清照那样的大诗人、大词曲作家；在科学方面，则出现了秦九韶（约1202～1261）、李治（1192～1279）、杨辉等一批杰出的数学家，在世界数学史上留下了光辉的一页。其中杨辉除以"杨辉三角"闻名于世外，也是世界上第一个从数学角度对幻方进行详尽研究的学者，并取得了丰硕成果。他在1275年所著的《续古摘奇算法》两卷中，除了给出洛书中3阶幻方的构造方法以外，还给出了4阶至10阶的幻方，其中4阶至8阶幻方各给出两图，杨辉称之为阴、阳图。下面我们就逐一介绍。

1. 3阶幻方

对洛书上的3阶幻方，杨辉将其生成法和最后布局归结为以下8句话：

九子斜排　上下对易　左右相更　四维挺出

戴九履一　左三右七　二四为肩　六八为足

根据杨辉的说法，洛书幻方是这样生成的：

（1）先将1～9这九个数按序斜排，见图1-1（a）；

（2）上下对调，即把1与9对调，见图1-1（b）；

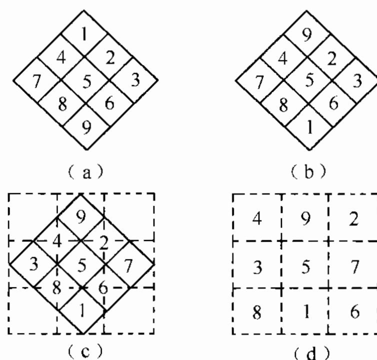


图1-1　洛书幻方的生成

（3）左右互换，即把3与7互换，见图1-1（c）；

（4）四面中间的2、4、6、8四数向外挺出，见图1-1（d）。

2. 4阶幻方

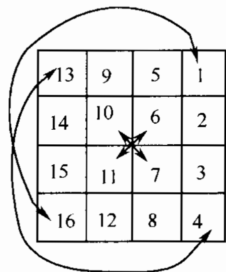
杨辉称4阶幻方为“花十六图”或“四四图”，给出了阴、阳两图及阴图的构造法为：“以十六子依次第作四行排列。先以外四角对换：一换十六，四换十三。后以内四角对换：六换十一，七换十”(图1-2)。对这两个幻方，我们后面将作详细讨论。

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

（a）阳图

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

（b）阴图



（c）阴图的生成

图1-2　杨辉的4阶幻方

3. 5阶幻方

杨辉称为“五五图”，有阴阳两式，见图1-3。

1	23	16	4	21
15	14	7	18	11
24	17	13	9	2
20	8	19	12	6
5	3	10	22	25

（a）阳图

12	27	33	23	10
28	18	13	26	20
11	25	21	17	31
22	16	29	24	14
32	19	9	15	30

（b）阴图

4	19	25	15	2
20	10	5	18	12
3	17	13	9	23
14	8	21	16	6
24	11	1	7	22

（c）阴图的原型

图1-3　杨辉的5阶幻方

其中的阳图，据后人研究，系通过“镶边法”构成，比法国数学家弗雷尼克尔（Frenicle）在 17 世纪时正式提出该法早 400 年。由图 1-3（a）可见，杨辉五五图的阳图的中央 3×3 方阵由 7、8、9；12、13、14；17、18、19 九数组成，构成幻方常数为 39 的 3 阶幻方。1 ~ 25 中其余 16 个数，则被分为和为 26 的 8 对数，即（1，25），（2，24），（3，23），（4，22），（5，21），（6，20），（10，16），（11，15），分别安排在外围一圈的对应行、列与对角线两端，从而保证了形成 5 阶幻方。

对杨辉五五图的阴图，我们注意到，其中的数不是从 1 开始的，而是从 9 开始的，其幻方常数不是 65，而是 105。把幻方中的每个数都减 8，我们可以获得杨辉 5 阶幻方阴图据以生成的常规 5 阶幻方，如图 1-3（c）。这个幻方设计得十分精巧。我们看到，它让 1 ~ 25 的中数 13 居中，首 4 数 1 ~ 4 中的两个偶数 2、4 分居右上角和左上角，两个奇数 1、3 则分居末行和首列之中，末 4 数 22 ~ 25 则与 1 ~ 4 居对称位置，即 22、24 分居右下角和左下角，23、25 居末列和首行之中。把首 4 末 4 和中数这 9 个数这样布局以后就形成了一个框架，其余 8 对和为 26 的数，其中 4 对以 13 为中心分布在内层，即（18，8），（5，21），（10，16），（9，17），其余 4 对分布在外层，即（19，7），（15，11），（12，14），（6，20），每对数都是对 13（即方阵中央方格）对称的。这就保证了每行、每列、两条主对角线上数字和都是 $26+26+13=65$。大家看，这是何等的巧妙。但是，杨辉是怎样构造出这样一个 5 阶幻方的，又为什么不给出这个常规的 5 阶幻方而要给出阴图所示的 5 阶幻方？这些都是谜，有待人们去探索、去发现。

4. 6 阶幻方

杨辉称作的“六六图”也有阴阳两式，见图 1-4。杨辉没有说明他是如何构成这两个 6 阶幻方的。

但是我们通过仔细研究其结构，可以看出一些端倪来。我们先把 6

阶幻方中所填的 1～36 排成 4 列 9 行，如表 1-1 所示。

13	22	18	27	11	20
31	4	36	9	29	2
12	21	14	23	16	25
30	3	5	32	34	7
17	26	10	19	15	24
8	35	28	1	6	33

（a） 阳图

4	13	36	27	29	2
22	31	18	9	11	20
3	21	23	32	25	7
30	12	5	14	16	34
17	26	19	28	6	15
35	8	10	1	24	33

（b） 阴图

图 1-4 杨辉的 6 阶幻方

表 1-1

列／行	4	3	2	1	和
1	28	19	10	1	58
2	29	20	11	2	62
3	30	21	12	3	66
4	31	22	13	4	70
5	32	23	14	5	74
6	33	24	15	6	78
7	34	25	16	7	82
8	35	26	17	8	86
9	36	27	18	9	90
和	288	207	126	45	666

表 1-1 中，每行 4 数之和依次增大 4，每列 9 数之和依次增大 81，每行 1、4 两数之和等于 2、3 两数之和，而 9 行的 9 个和数形成等差数列可按照洛书 3 阶幻方的构成法则组成 3 阶幻方，见图 1-5。

70	90	62
66	74	82
86	58	78

图 1-5 表 1-1 中 9 个和数构成的幻方

比较这个 3 阶幻方和杨辉“六六图”中的阳图，联系表 1-1，我们

就可以发现，杨辉6阶幻方正是把表1-1中每行的4个数组成一个2×2的方阵代替3阶幻方中的一个方格。代替时，使4数之和等于3阶幻方该方格中的数，每个2×2的方阵，表1-1中1、4两数和2、3两数分居上下，这样，行的方向上即可保证8数之和都相等。为保证每列和两条对角线上8数之和也相等，只要适当调整并列两数的左右位置即可。至于杨辉6阶幻方中的阴图，可以看出，它同阳图一样，组成它的9个2×2方阵保持不变，只是调整了每个方阵中数的位置，但仍维持每行、每列、两条主对角线上8数之和恒等。

5. 7阶幻方

杨辉称7阶幻方为“衍数图”，因古人有“大衍之数五十，其用四十有九”之说。也有阴阳两式，见图1-6。

46	8	16	20	29	7	49
3	40	35	36	18	41	2
44	12	33	23	19	38	6
28	26	11	25	39	24	22
5	37	31	27	17	13	45
48	9	15	14	32	10	47
1	43	34	30	21	42	4

（a）阳图

4	43	40	49	16	21	2
44	8	33	9	36	15	30
38	19	26	11	27	22	32
3	13	5	25	45	37	47
18	28	23	39	24	31	12
20	35	14	41	17	42	6
48	29	34	1	10	7	46

（b）阴图

图1-6 杨辉的7阶幻方

杨辉对他的7阶幻方是如何构成的也未作说明，但我们仍可从其结构中揣摩一二。杨辉7阶幻方中的阳图，其中心3×3方阵也是一个幻方。读者可能要问，这中间的9个数既不是连续的自然数，也不是等差级数，怎么也能构成幻方呢？原来，除1，2，…，n^2（连续自然数）以及$1+h$，$2+h$，…，n^2+h（等差级数）可构成幻方外，a，$a+h$，a

$+2h$，…，$a+(n-1)h$；$(a+k)$，$(a+k)+h$，$(a+k)+2h$，…，$(a+k)+(n-1)h$；…，$[a+(n-1)k]$，$[a+(n-1)k]+h$，…，$[a+(n-1)k]+(n-1)h$ 这样一个数列也可构成幻方，这个数列中包括 n 个等差级数，公差都是 h，而每个等差级数的首项也组成一个等差级数，其公差是 k，这个 k 常被称为"和谐数"。杨辉 7 阶幻方阳图中心的 3 阶幻方就是由 $a=11$，$h=6$，$k=8$ 这样一个数列（11，17，23；19，25，31；27，33，39）按洛书 3 阶幻方的法则构成的。有了这样一个 3 阶幻方为核心，按杨辉的数学功底，把和为 50 的 8 个数对（41，9），（18，32），（36，14），（35，15），（40，10），（38，12），（24，26），（13，37）以对称方式镶到 3 阶幻方四周，形成 5 阶幻方，再以同样方法把和为 50 的其他 12 个数对（49，1），（7，43），（29，21），（20，30），（16，34），（8，42），（46，4），（2，48），（6，44），（22，28），（45，5），（47，3）进一步镶在外层而形成 7 阶幻方就不是什么难事了。

与 5 阶幻方阴图相似，杨辉 7 阶幻方阴图也不是镶边法形成的，但同样让 1～49 的中数 25 居中，首 4 数 1、2、3、4 和末 4 数 46、47、48、49 分居 4 角和首末行列的中央形成一基本框架，然后以此为基础，将和为 50 的 4 个数对（27，23），（11，39），（26，24），（45，5）以对称方式置于中央方格 25 的四周形成中央 3×3 方阵（非幻方），再以同样方式把和为 50 的 8 个数对（15，35），（36，14），（9，41），（33，17），（8，42），（22，28），（37，13），（31，19）置于内圈，把另外 8 个和为 50 的数对（21，29），（16，34），（40，10），（43，7），（30，20），（32，18），（12，38），（6，44）置于外围，恰恰形成 7 阶幻方！可见杨辉的 5 阶与 7 阶幻方阴图虽然不是镶边幻方，却是巧妙地运用了镶边法构成的。

6. 8 阶幻方

杨辉称 8 阶幻方为"易数图"，因为 $8\times8=64$，而古书《周易》中

恰好给出了64卦，故称64为“易数”。也有阴阳两式，见图1-7。

61	4	3	62	2	63	64	1
52	13	14	51	15	50	49	16
45	20	19	46	18	47	48	17
36	29	30	35	31	34	33	32
5	60	59	6	58	7	8	57
12	53	54	11	55	10	9	56
21	44	43	22	42	23	24	41
28	37	38	27	39	26	25	40

（a）阳图

61	3	2	64	57	7	6	60
12	54	55	9	16	50	51	13
20	46	47	17	24	42	43	21
37	27	26	40	33	31	30	36
29	35	34	32	25	39	38	28
44	22	23	41	48	18	19	45
52	14	15	49	56	10	11	53
5	59	58	8	1	63	62	4

（b）阴图

图1-7　杨辉的8阶幻方

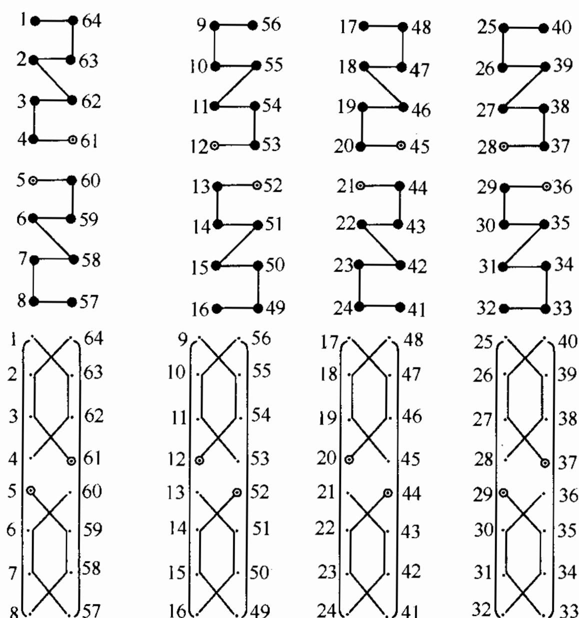


图1-8　李俨对杨辉8阶幻方形成方法之分析

对于杨辉的8阶幻方是如何形成的，后人有种种不同的猜测，都各有理由。著名中算史专家李俨的说法比较简单、明了、直观。他认为杨辉8

阶幻方中的阳图和阴图都是将1~64按从小到大和从大到小两种次序先相间排成8列8组，如图1-8所示，每组中相对2数之和均为65。然后对阳图，顺次取1、4、5、8、2、3、6、7组，从空心圆圈所标志的那个数开始沿连线方向展开依次填入1~8行，各组之间没有交叉；对阴图，1~2组、3~4组，5~6组，7~8组分别对应于1、8，2、7，3、6，4、5行，两者之间有交叉，每行也从空心圆圈所标志的那个数开始沿折线方向顺次取数，走到顶（底）端时折向同侧的底（顶）端继续，依这个次序填入方阵各行，即得幻方。由此可见，在阳图中，相邻奇偶列并列2数之和均为65；在阴图中，相邻奇偶列并列2数之和交叉出现64、66（在行、列两个方向均如此）。应该说，无论阳图、阴图，设计得都是十分精巧的。

7. 9阶幻方

杨辉称9阶幻方为“九九图”，仅一幅，见图1-9。分析这个9阶幻方的构造，可以看出它同构造6阶幻方的方法是相似的，即把1~81排成9行9列（表1-2）之后，可以把9行的和数所形成的等差级数按洛书3阶幻方的构成法组成一个3阶幻方，如图1-10，然后用表1-2中一行9个数组成3×3的方阵代替这个幻方中的一个元素，行中1、6、8；2、4、9和3、5、7（其和都相等）各成方阵中一行。这样，在行的方向上9数之和必然相等，只要适当调整它们在列上的分布，使每列和2条主对角线上9数之和也相等，就大功告成了。杨辉的这个9阶幻方中，1~9这9个数字刚好都位于每个3×3方阵的底行中央，正好是一个洛书3阶幻方，这是很值得注意的。

31	76	13	36	81	18	29	74	11
22	40	58	27	45	63	20	38	56
67	4	49	72	9	54	65	2	47
30	75	12	32	77	14	34	79	16
21	39	57	23	41	59	25	43	61
66	3	48	68	5	50	70	7	52
35	80	17	28	73	10	33	78	15
26	44	62	19	37	55	24	42	60
71	8	53	64	1	46	69	6	51

图1-9　杨辉的9阶幻方

表 1-2

行＼列	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	73	64	55	46	37	28	19	10	1	333
2	74	65	56	47	38	29	20	11	2	342
3	75	66	57	48	39	30	21	12	3	351
4	76	67	58	49	40	31	22	13	4	360
5	77	68	59	50	41	32	23	14	5	369
6	78	69	60	51	42	33	24	15	6	378
7	79	70	61	52	43	34	25	16	7	387
8	80	71	62	53	44	35	26	17	8	396
9	81	72	63	54	45	36	27	18	9	405
和	693	612	531	450	369	288	207	126	45	3 321

360	405	342
351	369	387
396	333	378

图 1-10　表 1-2 中 9 个和数构成的 3 阶幻方

此外，我们还要注意这个幻方有以下奇异性质：

①把它分成 9 个 3×3 的小方阵的话，每个也都是幻方；这 9 个 3 阶幻方的幻和构成首项为 111，公差为 3 的等差数列，又可以形成一个 3 阶幻方。

②幻方中以中央的 41 为中心，任意对称位置上的 2 数之和都是 82。这样，除了中央的 3×3 方阵是一个 3 阶幻方外，对向外扩展的 5×5、7×7、9×9 方阵，若分别取中央元素 41、四角元素（49、65、33、17；40、38、42、44；31、11、51、71）和 4 边的中央元素（9、25、73、57；45、43、37、39；81、61、1、21）又可形成 3 个 3 阶幻方。具有这种性质的幻方叫对称幻方，我们后面还将进一步介绍。

8. 10 阶幻方

这是杨辉给出的最高阶幻方，他称之为“百子图”，仅一幅，见图 1-11（a）。但不知什么原因，百子图仅行列方向符合幻方常数 505，对角线方向上 10 数之和一为 540，一为 470，因此并不符合幻方的定义。杨辉 10 阶幻方的这一问题被清初的张潮所发现，在《心斋杂组》卷下中加以指出，

并给出了一个正确的10阶幻方，称为“更定百子图”，见图1-11(b)。

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

(a)

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	47	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

(b)

图1-11　10阶幻方

杨辉的百子图虽然只是“半幻方”，但它有许多令人叫绝的特点：

(1) 它是“田格一律化”的，即其中任意 2×2 小方阵（包括由首行、末行或首列、末列所组成的 2×2 方阵）中的4数之和都是202，例如82，79，18，23；61，80，31，30；97，5，4，96；35，26，74，67。

(2) 以方阵中心为对称中心的任意大小正方形或任意大小矩形4角上的4数之和也都是202，例如38，63，73，28；64，37，27，74；18，93，83，8。

(3) 以方阵中心横轴或中心纵轴上的任一交点为对称中心的任意大小正方形或任意大小矩形4角上的4数之和也都是202，例如20，82，81，19；97，14，44，47；62，39，36，65。

(4) 百子图主对角线上10数之和虽然不是幻方常数505，但是正反两组各10个“V”形曲对角线（曲对角线定义见下节）上10数之和却是幻方常数505！例如95，7，68，29，51，50，72，33，94，6；88，9，71，40，59，42，61，30，92，13；14，86，25，64，43，58，37，76，15，87。尤其令人称奇的是，如果把这种V形曲对角线的张开角度变小，只要仍维持对称而且落在方阵之内，则其上10数和也等于505，例如1，18，25，27，52，49，74，76，83，100；91，93，75，64，59，42，37，26，8，10。

(5) 对于横向的V形曲对角线，它们不满足幻方常数，但规律性

地交替出现465和545。但我们惊奇地发现，同纵向的V形曲对角线类似，如果把V形的开口角度变小，则仍然满足幻方常数，例如1,79,43,37,85,15,74,48,32,91;100,22,58,64,16,86,27,53,69,10。

那么杨辉是怎样构成如此神奇的百子图的呢?

根据“百子图”的结构，李俨认为它是把1～100按从小到大和从大到小的次序排成2列，然后从标空心圆圈的数开始各按规律顺序取10个数填入10×10方阵中形成的，如图1-12。为了清楚，这个图分成3

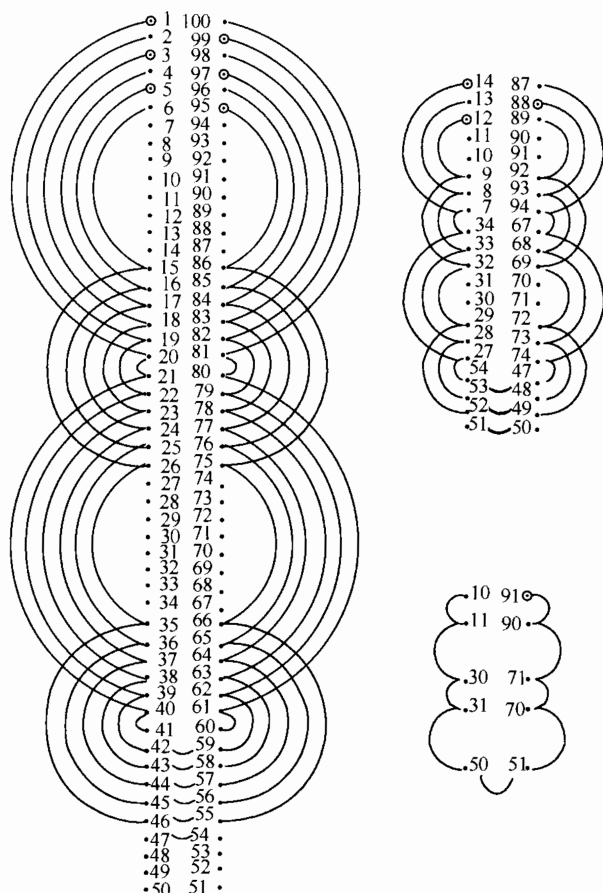


图1-12　李俨对百子图形成方法的分析

部分，左侧部分表示 1 ~ 6 行的取数顺序，右侧上方部分表示 7、8、9 三行的取数顺序，右侧下方部分表示第 10 行的取数顺序。另有一种分析方法认为，杨辉仍然是先把1 ~ 100按从小到大和从大到小两种次序交替地排成10行10列，如表 1-3 所示。在这个表中，每行 10 数之和均等于 505，已满足幻方的要求。然后把所有奇数行的1、10列，2、9列，3、8列，4、7列，5、6列元素两两对换，形成表 1-4。在这个表中，奇数列10数之和等于510，比幻方常数大5；偶数列10数之和为500，比幻方常数小5。注意到奇数列和相邻偶数列7、8、9三行中3数之和正好各差5，把它们两两对换，就成为杨辉的百子图了。这种猜测也比较合情合理。

表 1-3

行＼列	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	100	81	80	61	60	41	40	21	20	1	
2	99	82	79	62	59	42	39	22	19	2	
3	98	83	78	63	58	43	38	23	18	3	
4	97	84	77	64	57	44	37	24	17	4	
5	96	85	76	65	56	45	36	25	16	5	
6	95	86	75	66	55	46	35	26	15	6	505
7	94	87	74	67	54	47	34	27	14	7	
8	93	88	73	68	53	48	33	28	13	8	
9	92	89	72	69	52	49	32	29	12	9	
10	91	90	71	70	51	50	31	30	11	10	
和	955	855	755	655	555	455	355	255	155	55	5050

兰州交通大学的黄均迪先生提出了另一种分析方法。他认为杨辉的百子图是将图 1-13（a）和（b）2 个规则方阵中的数字叠加而成的，即把（a）方阵中的数字作为十位数，把（b）方阵中的数字作为个位数，合并在一个方阵中，然后加 1，就是杨辉的百子图了。对杨辉百子图构造法的这样一种分析似乎更加直观和鲜明，也很有特色。

表 1-4

行＼列	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	和
1	1	20	21	40	41	60	61	80	81	100	505
2	99	82	79	62	59	42	39	22	19	2	
3	3	18	23	38	43	58	63	78	83	98	
4	97	84	77	64	57	44	37	24	17	4	
5	5	16	25	36	45	56	65	76	85	96	
6	95	86	75	66	55	46	35	26	15	6	
7	7	14	27	34	47	54	67	74	87	94	
8	93	88	73	68	53	48	33	28	13	8	
9	9	12	29	32	49	52	69	72	89	92	
10	91	90	71	70	51	50	31	30	11	10	
和	500	510	500	510	500	510	500	510	500	510	5050

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8
8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

(a)

0	9	0	9	0	9	0	9	0	9
8	1	8	1	8	1	8	1	8	1
2	7	2	7	2	7	2	7	2	7
6	3	6	3	6	3	6	3	6	3
4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
4	5	4	5	4	5	4	5	4	5
3	6	3	6	3	6	3	6	3	6
7	2	7	2	7	2	7	2	7	2
1	8	1	8	1	8	1	8	1	8
0	9	0	9	0	9	0	9	0	9

(b)

图 1-13　黄均迪对百子图形成方法的分析

1.3 杨辉 4 阶幻方中的奥秘

对杨辉开发的这些幻方，大家除了承认它们是世界上最早的幻方以外，对这些幻方本身所包含的奥秘，我们还探索得很不够。以 4 阶幻方为例，学术界过去重视的是阿拉伯幻方和丢勒幻方（见后文），陆续发

现与公布了它们的一些奇特性质。事实上，不管是阿拉伯的4阶幻方也罢，丢勒的4阶幻方也罢，都是杨辉4阶幻方的变种，从中发现的奇特性质都源于杨辉4阶幻方。为此，我们这里对杨辉4阶幻方作深入一步的考察。

（1）杨辉4阶幻方的生成方法是最简单的。如前所述，其4阶阴图是将1～16顺序从上到下、自右至左填入4×4的方阵，然后对角交换4个顶端的数字和中央2×2方阵中的数字（图1-2（c））即得，并不需要繁复的编排和算法。其阳图则是将阴图逆时针转90°，然后1、2列互换，3、4列互换而成，也非常简单。

（2）杨辉的4阶幻方，不管阳图也罢，阴图也罢，都非常对称和匀称，是十分“和谐”和“美丽”的方阵。为了讨论和比较幻方的对称性和匀称性，我们这里以4阶幻方为例，在行、列、主对角线之外，再定义以下几种线段，但这种定义可推广至任意n阶幻方。

① 折对角线（broken diagonal）：由与主对角线平行、但“折断”了的几段对角线所组成，如图1-14。图中有阴影的方块组成所定义的线段（下同）。

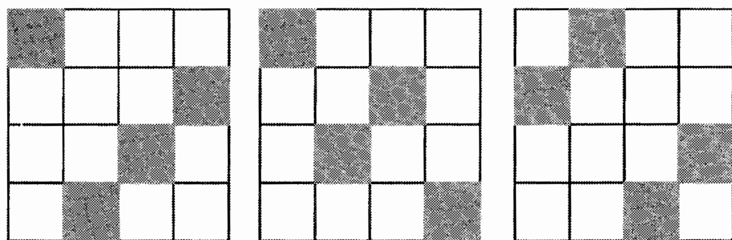


图1-14　折对角线

② 曲对角线（bent diagonal）：由2条主对角线之各一半所组成，位于方阵之上半部或下半部，左半部或右半部，如图1-15。好似对角线走到一半，突然改变方向，“弯曲”到另一侧而成，故名。

③ 折行（broken row）：同折对角线类似，由若干平行于水平线的

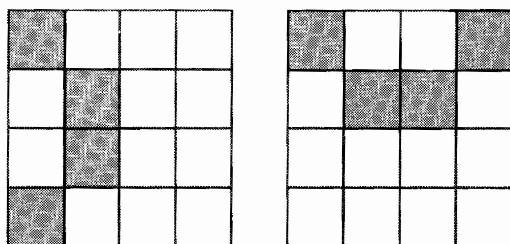


图 1-15　曲对角线

线段所组成，这些线段跨越所有的列，并且呈现出某种对称性。设以 a_{ij} 表示 i 行 j 列上的一个元素，则以下 4 个元素均组成折行，如图 1-16。好比一行被“折断”成 n 段。

$$a_{m1}a_{m2}a_{n3}a_{n4};\quad a_{m1}\ a_{n2}a_{m3}a_{n4};\quad a_{m1}a_{n2}a_{n3}a_{m4}$$

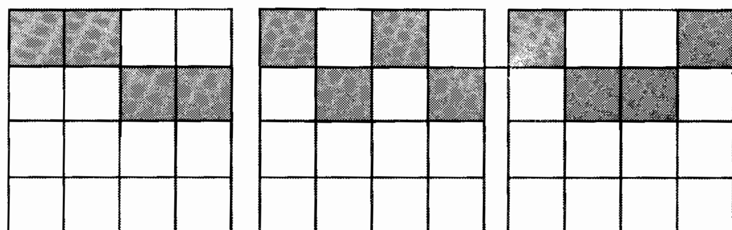


图 1-16　折行示例

④ 折列（broken column）：同折行类似，由若干平行于垂直线的线段组成，这些线段跨越所有的行，且呈现出某种对称性，如图 1-17。

⑤ 曲行（bent row）：同曲对角线类似，由同处左半侧或右半侧的任意相邻两条半行（half-row）组成。如图 1-18（a），好比一行走到中点，突然变向，“弯曲”到另一方向。

⑥ 曲列（bent column）：同曲行类似，由同处上半部或下半部之任意两条相邻半列（half-column）所组成，如图 1-18（b）。其中（a）既可看做曲行，也可看做曲列。

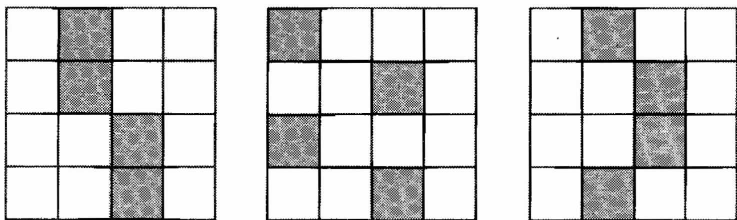


图 1-17　折列示例

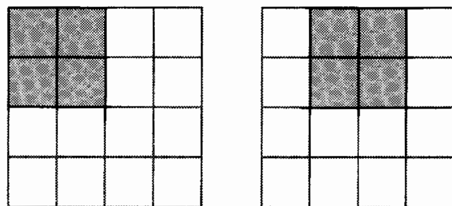

(a) 曲行　(b) 曲列

图 1-18　曲行和曲列示例

曲对角线（行、列）名称的来由是因为它们原先似乎是一条对角线（行、列），但在中点被弯曲到另一方向去了。

⑦ 四角方（corners square）：由方阵中任意大小，任意位置上的规则四边形的 4 顶角元素所组成，所谓规则四边形包括正方形、矩形、梯形、菱形、平行四边形，如图 1-19。在 4 阶幻方的情况下，曲和折对角线、行、列显然也都形成四角方。但由于我们后面要讨论高阶幻方，所以还要保留它们的定义，而且在既是曲（折）对角线（行、列），又是四角方的情况下，我们把它归入前者。

有了以上定义，讨论幻方对称性就方便了。

可以看出，杨辉 4 阶幻方包含多方面的对称性，以阴图为例，在水平方向上有以下对称性：

① 每行 4 个数字相邻两两之和都是 13 和 21，1、4 行 13 在左，21 在右，2、3 行则 21 在左，13 在右。

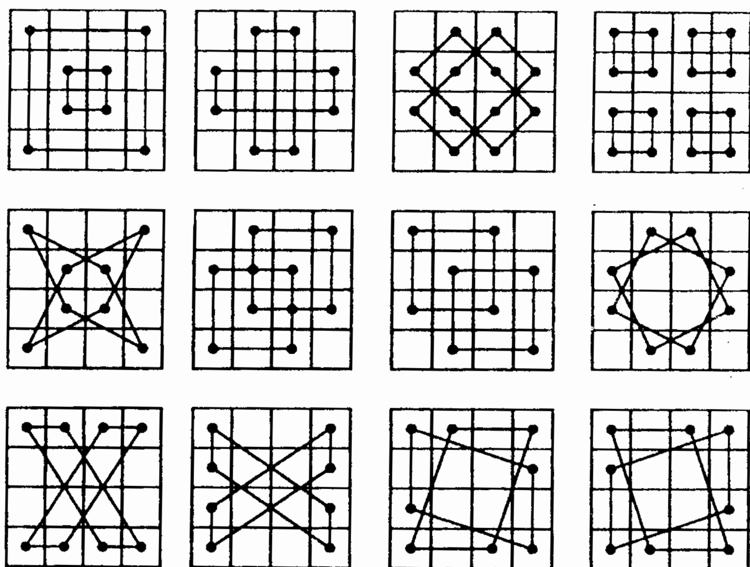


图 1-19　各种“四角方”

② 每行 4 个数字间隔两两之和都是 25 和 9，1、4 行和 2、3 行次序正相反。

③ 每行 4 个数字，1、4 两行两端和中间两个数字之和分别是 20 和 14，成互补之势；2、3 两行两端和中间两个数字之和分别是 16 和 18，也成互补之势。

在垂直方向上，有以下几种对称性：

① 每列 4 个数字相邻两两之和都是 18 和 16，1、4 列 18 在上，16 在下，2、3 列则 16 在上，18 在下。

② 每列 4 个数字间隔两两之和都是 19 和 15，1、4 列和 2、3 列次序也正相反。

③ 每列 4 个数字 1、4 两列两端和中间两个数字之和分别是 5 和 29，成互补之势；2、3 两列两端和中间两个数字之和分别是 21 和 13，也成互补之势。

由于有以上的多种对称性，因此，杨辉4阶幻方除了满足幻方的基本条件，即行、列、主对角线上4元素之和是幻方常数34之外，还有许多折对角线、折行、折列、曲行、曲列和四角方上4元素之和也是幻方常数34。我们把阴图符合这条件的4元素组全部列出如下

行：(4，9，5，16)，(14，7，11，2)，(15，6，10，3)，(1，12，8，13)

列：(4，14，15，1)，(9，7，6，12)，(5，11，10，8)，(16，2，3，13)

对角线：(4，7，10，13)，(16，11，6，1)

折行：(15，9，8，2)，(14，12，5，3)，(15，6，11，2)，(14，7，10，3) (15，7，10，2)，(14，6，11，3)，(4，12，5，13)，(1，9，8，16)

折列：(9，7，10，8)，(4，2，15，13)，(5，11，6，12)，(5，7，10，12) (9，11，6，8)，(16，14，3，1)

折对角线：(5，2，15，12)，(9，14，3，8)，(16，7，10，1)，(4，11，6，13)

曲行（列）：(4，9，7，14)，(5，16，11，2)，(15，6，1，12)，(10，3，8，13)

四角方：(7，11，6，10)，(4，16，1，13)，(4，5，15，10)，(9，16，6，3)，(14，11，1，8)，(7，2，12，13)，(9，5，12，8)，(14，2，15，3)，(4，9，15，6)，(14，7，1，12)，(5，16，10，3)，(11，2，8，13)，(4，5，14，11)，(9，16，7，2)，(15，10，1，8)，(6，3，12，13)，(4，9，8，13)，(5，16，1，12)，(16，2，15，1)，(4，14，3，13)，(7，11，15，1)，(11，10，1，12)，(16，2，6，10)，(7，11，3，13)，(4，14，6，10)，(4，9，11，10)，(5，16，7，6)，(7，6，8，13)

以上总共为60组。我们知道，1～16这16个数中，4数之和为34的一共有86组。这样，这86组可能的组合中，约有70%是呈现有规律的分布的，可见杨辉4阶幻方阴图的对称性和匀称性是何等的好。

（3）杨辉4阶幻方中数字分布的对称性和均匀性不但表现在数字和方面，甚至还进一步表现在数字的平方和以及立方和方面。幻方的这一现象最早是在第二次世界大战结束后不久，处于盟军占领状态下的德国一个学者阿尔弗雷德·缪斯纳（Alfred Moessner）发现的。1947年，他在《Scripta Mathematica》季刊上发表了一篇名为《一个神奇幻方》（A Curious Magic Square）的文章，声称他构造出了一个神奇的幻方，上、下两半和左、右两半数字的平方和都相等，两条对角线上数字的立方和也相等。缪斯纳的幻方如图1-20。我们仔细分析一下他的幻方，就可发现它其实是杨辉4阶幻方（阴图）的一个变形：

把杨辉4阶幻方的第2列变为第1列，第4列变为第2列，第1列变为第3列，第3列变为第4列，再上下调个头，就是缪斯纳的幻方。因此缪斯纳发现的现象，杨辉4阶幻方也都是基本上具有的。具体来说，杨辉4阶幻方1、4行上的数字的平方和相等

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

图1-20　缪斯纳的“神奇幻方”

$$4^2+9^2+5^2+16^2=1^2+12^2+8^2+13^2=378$$

2、3行上的数字的平方和也相等

$$14^2+7^2+11^2+2^2=15^2+6^2+10^2+3^2=370$$

因此，幻方上半部和下半部8数之平方和相等，等于748。

1、4两列上数字的平方和也相等

$$4^2+14^2+15^2+1^2=16^2+2^2+3^2+13^2=438$$

2、3两列上数字的平方和也相等

$$9^2+7^2+6^2+12^2=5^2+11^2+10^2+8^2=310$$

因此，幻方左半部和右半部8数之平方和也相等，而且也等于748。

两条对角线上的8个数字以及非对角线上的8个数字的平方和也都等于748

$4^2+7^2+10^2+13^2+16^2+11^2+6^2+1^2=9^2+5^2+2^2+3^2+8^2+12^2+15^2+14^2=748$

其立方和也相等，等于9248

$4^3+7^3+10^3+13^3+16^3+11^3+6^3+1^3=9^3+5^3+2^3+3^3+8^3+12^3+15^3+14^3=9248$

由于缪斯纳的幻方是杨辉幻方的变形，因此，上述性质缪斯纳幻方也是具有的。但应该承认，经过变换以后的缪斯纳幻方确实有其过人之处，那就是它的两条对角线上的数字的平方和以及立方和也都是相等的

$$12^2+3^2+14^2+5^2=8^2+15^2+2^2+9^2=374$$

$$12^3+3^3+14^3+5^3=8^3+15^3+2^3+9^3=4624$$

以上性质是杨辉幻方所不具备的，而且巧的是，对角线上4数立方和4624本身还是一个平方数：$4624=68^2$。无论缪斯纳是否是根据杨辉幻方构成他的幻方的，我们对德国学者在困难情况下坚持探索的这种精神应该表示钦佩。需要指出的是，缪斯纳不但在幻方研究中有所发现，在数学的其他领域也有很多研究成果，这一阶段他在《Scripta Mathematica》上发表了一系列文章。可惜我们除了知道他是“数学迷”之外，对他的其余情况一无所知。

（4）杨辉4阶幻方中还隐藏着一个十分奇妙的性质。为此，我们要把幻方中的数都减去1，使它变成0～15，然后用0000～1111的四位二进制数代替。提出这一方法的是IBM公司沃森研究中心的研究人员马克·柯林斯（Mark Collins）。经过这样变换以后的杨辉4阶幻方阴图如图1-21。考察这个幻方，我们就会惊奇地发现，这个幻方中的数是对中心成对称互补的，例如1111对0000，1010对0101，如此等等。由于二进制同八卦有着密不可分的联系，而八卦又在中国古代文人中有着巨大的影响，因此，我们有理由猜测杨辉4阶幻方的这一奇特性质也许不是偶然的巧合。由于有这样的对称性，幻方每行、每列和2条主对角线

上都各有 8 个 0 和 8 个 1，图 1-19 所示各四角方 4 顶点上也都各有 8 个 0 和 8 个 1，呈现出十分精确的对称性和平衡性。

0011	1000	0100	1111
1101	0110	1010	0001
1110	0101	1001	0010
0000	1011	0111	1100

图 1-21　杨辉 4 阶幻方的二进制形式

以上讨论是针对杨辉 4 阶幻方的阴图进行的，但所列各种奇妙特性对阳图同样适用，唯一区别是：阳图中构成幻方常数的行、列、对角线、折行、折列、折对角线、曲行和四角方的总数是 46 个，比阴图少 14 个（读者可自行验证一下）。也许这个数量上的差别正是杨辉称此为阴图而彼为阳图的原因。因为大家承认，就人类而言，女性比男性更匀称，更美丽。著名女作家冰心先生说过这样的话："世界上若没有女人，这世界至少要失去十分之五的真，十分之六的善，十分之七的美。"这很生动形象地反映了公认的这个观点。这两个四阶幻方其他特性都一样，但构成幻方常数的直线和四角方一多一少，说明其匀称性和美观程度稍有差异，于是把更匀称更美观的那一个赋予阴性，象征女性，也就很自然了。当然，这只是笔者的猜测，有兴趣的读者不妨作进一步的探索。

就笔者所见，对杨辉幻方的阴阳两图进行过探讨的，有中国科技史专家何丙郁先生。他在"从科技史观点谈易数"一文中认为，杨辉幻方之所以分阳图和阴图，是因为阳图右上角的数字从奇数改为偶数，故称阴图，以符合易数中阴阳两仪的用义。何先生的这一观点用于杨辉的 4、5、7、8 阶幻方还说得过去，用于 6 阶幻方就不行了，因为杨辉 6 阶幻方的阴阳两图右上角都是偶数。

国外学者有没有对幻方的美学特性进行过探讨呢？笔者最近在 IBM 公司的研究员庇考夫（Clifford A. Pickover）主编的书《图案——分形，艺术和自然》(The Pattern Book—Fractals, Art, and Nature, World Scientific, 1995）中看到两个莫尔娜（V. Molnar 和 F. Molnar）的一篇文章"Hommag à Dürer"，正是以"优美度"（aesthetic measure）理论为基础，对幻方进行讨论的。所谓优美度是 20 世纪上半叶美国最有影响的

数学家之一伯克霍夫（George David Birkhoff，1884—1944）提出来的。伯克霍夫在微分方程和动力学系统的研究中成绩卓著，在世界范围内享有崇高声誉，1924 年当选美国数学会主席，1937 年出任美国科学促进会主席，是美国科学院院士。他对应用数学十分重视，曾致力于将数学用于美学，甚至伦理学。在将数学用于美学方面，他 1933 年出版了专著《优美度》(Aesthetic Measure, Cambridge)，书中，他认为对世界上任意同类的事物，不管是自然形成的，还是人造的，诸如多边形、各种装饰品、瓶瓶罐罐，甚至谐波、音乐、诗的韵律，等等，都可以定义两个量，一个是“序”O（Order），另一个是“复杂度”C（Complexity），这两者的比就确定了该事物的“优美度”M，也就是

$$M = \frac{O}{C}$$

换句话说，事物的优美度正比于它的序，而反比于它的复杂度；或者说，事物愈有序、愈简单，它就愈优美；反之，愈杂乱无章、愈复杂的事物，就愈不美观。伯克霍夫的这一理论虽然引起了很多争议，但在艺术家、音乐家、心理学家中有很大影响。莫尔娜的文章在丢勒幻方（详见 1.5 节）中依次画出连接1和 2，2 和 3，…的连线，形成一个图案，如图 1-22 所示。这个图案显然是非常简洁有序的，因而是优美的。作为对比，莫尔娜又在 256 个由 1～16 形成的不同的非幻方方阵中作出同样的连线，结果如图 1-23 所示，其中没有一个图形是有序的，都非常复杂，显得乱七八糟，因而不能给人以美感。莫尔娜由此得出结论：丢勒幻方中蕴含着无比的美，难怪他们把文章标题定为“向丢勒致敬”！

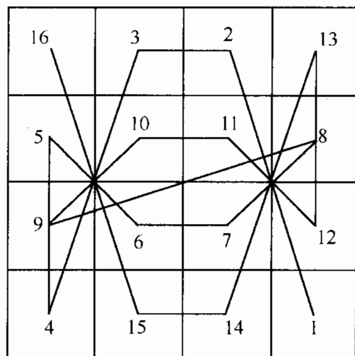


图 1-22　丢勒幻方中的图案

莫尔娜用优美度对幻方和非幻方进行比较，我们能不能用优美度对同类幻方进

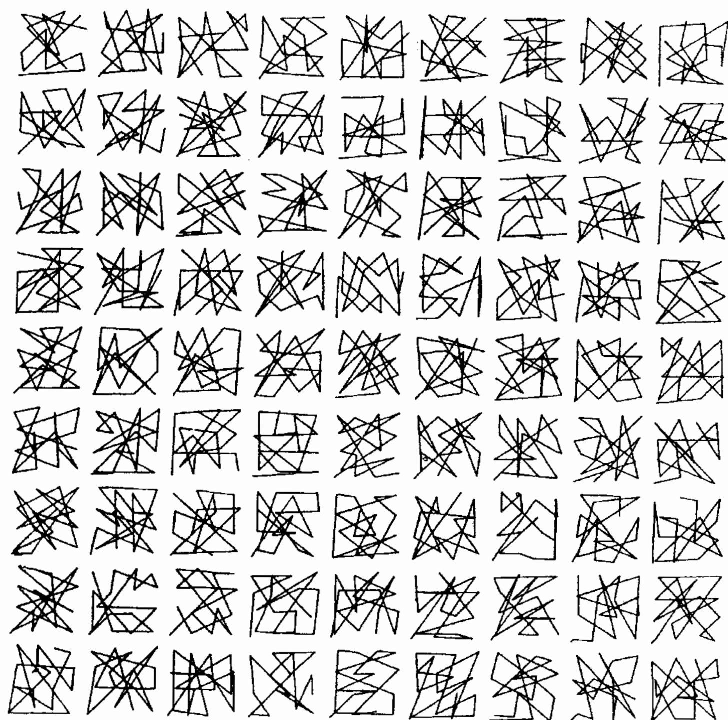
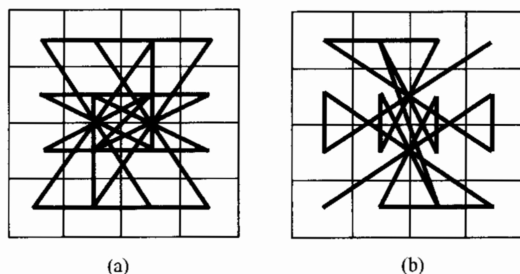


图 1-23　非幻方方阵中的图案



(a)　　(b)

图 1-24　杨辉 4 阶幻方中的优美图形

行比较呢？我们做了如下尝试：在杨辉4阶幻方的阳图和阴图中依次连接1～16，其结果见图1-24（a）和图1-24（b）。显然，这2个图案同丢勒幻方中的图案一样，也都有很好的对称性，也都比较有序而不杂乱，是很美观的。但由于“秩”和“复杂度”本身都是模糊概念，O和C是两个模糊量，因此其优美度很难准确定量，孰大孰小非常难说。由于各人的偏好不同，标准各异，真要对这2个图案的优美度赋值的话，恐怕是因人而异的，就像在体操、跳水等体育项目中，不同的裁判员对一个运动员的动作会打出不同的分一样。有没有什么绝对标准呢？笔者想到，这些图其实都是哈密顿通路，也就是从节点1出发，经过节点2、3、4、…而终止于节点16的路径，那么，路径的长短显然是衡量路径复杂度的一个“硬”指标。设相邻节点间的距离为a，则可以算出，杨辉4阶幻方阳图中图案的路径长度为$40.78a$，而阴图中的为$34.53a$。因此，就这项指标而言，杨辉4阶幻方的阴图优于阳图，这个结论和笔者前面得出的结论一致。应该指出，丢勒幻方中图案的路径长度为$29.5a$，又小于杨辉4阶幻方阴图，就此而论，作为既是数学家又是美术家的丢勒所设计的幻方确实高人一等。

1.4 出土文物中的阿拉伯幻方

在今陕西省西安城东北3公里处，有一个元代安西王府的遗址。安西王的名字是忙哥剌，是元世祖忽必烈的第三个儿子，后被加封为秦王，因此他的王府建于长安。据史书记载，安西王府始建于1273年，距今已有700多年的历史。历经战乱与沧桑，安西王府早已荡然无存。解放初，文物工作队在发掘安西王府遗址时，找到几块铁片，上面有奇怪的文字符号，见图1-25。经过专家鉴定，铁片上的文字符号属于古代的阿拉伯数字系统，同波斯数学家阿尔·卡西在1427年所著的《算术之钥》一书中所用的数码符号完全一样。由此把这个铁片上的符号翻译过来，人们惊奇地发现这原来是一个6阶幻方，如图1-26。这个6阶幻

方的幻方常数是 111。进一步的研究又揭示，这个幻方很不平常，它是由一个 4 阶的泛对角线幻方，在每个方格的数字上都加 10，组成中央的 4 ×4 方阵，然后在四周镶一圈所形成的（关于泛对角线幻方和镶边法，本书后面还将详细讨论）。而如果将中央的 4 ×4 方阵中的各个数字都减去 10，恢复成为如图 1-27 的标准 4 阶幻方（即从 1 开始由 n^2 个连续自然数组成的幻方），并对它进行分析，我们可以发现：

٢٨	٤	٣	٣١	٣٥	١٠
٣٦	١٨	٢١	٢٤	١١	١
٧	٢٣	١٢	١٧	٢٢	٣٠
٨	١٣	٢٦	١٩	١٦	٢٩
٥	٢٠	١٥	١٤	٢٥	٣٢
٢٧	٣٣	٣٤	٦	٢	٩

图 1-25　安西王府遗址中出土的阿拉伯幻方

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

图 1-26　铁片上的 6 阶幻方

8	11	14	1
13	2	7	12
3	16	9	6
10	5	4	15

图 1-27　出土文物中复原的阿拉伯 4 阶幻方

（1）同杨辉 4 阶幻方（阴图和阳图）相比较，它的每一列是杨辉 4 阶幻方的 2 ×2 一角。

（2）阿拉伯幻方中可构成一线或一方的幻方常数共计 52 个，少于杨辉 4 阶幻方的阴图而多于阳图。

（3）如果把阿拉伯幻方中的各个数字也都减去 1 并用 4 位二进制表示，再将幻方逆时针方向旋转 45°，形成如图 1-28 的布局，设想其中央垂直方向有一面镜子，则其左右恰互为镜像，见图 1-28。

（4）阿拉伯幻方上半部和下半部、左半侧和右半侧 8 个数字的平

方和也都等于748；但是它的对角线上的8个数字的平方和和立方和同非对角线上的8个数字的平方和和立方和是不相等的。

由此可见，这个阿拉伯幻方也是十分神奇的，但同杨辉的幻方相比稍逊一筹。

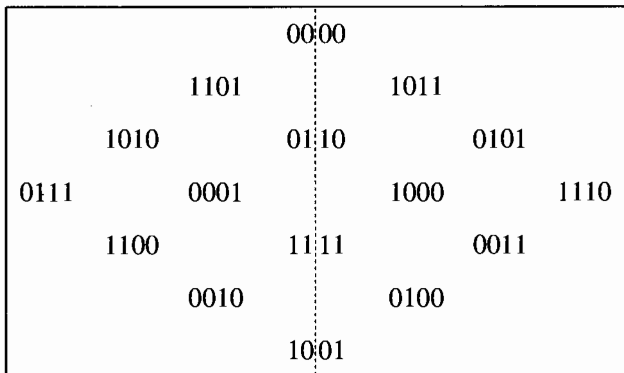


图1-28　阿拉伯幻方左旋45°的二进制形式

这件文物，现存陕西省博物馆。读者若有机会去那里参观，千万不要忽略了这件展品。据考证，这些铁板幻方的来历如下：成吉思汗的孙子蒙哥派旭烈兀西征时，曾命他将当时著名的中亚科学家纳速拉丁带回中国。但旭烈兀进入波斯后并没有把纳速拉丁送回，而是带他继续西征巴格达，改派了精通天文的扎马鲁丁到中原替安西王推算历法。这些铁板幻方大概就是由扎马鲁丁带来的。

1.5 欧洲的“幻方热”和名画“忧伤”中的幻方

前面曾经提到，幻方传入欧洲已是15世纪的事，当时正是欧洲文化和思想发展经历变革的重要时期——文艺复兴时期，科学、文学和艺术获得普遍高涨、空前繁荣。因此，奇妙的幻方一经传到欧洲，立即就引起普遍的重视和关注，人们竞相研究，谈论幻方一时成为风尚。著名的数学家考奈留斯·阿格里派（Cornelius Agrippa）费尽脑汁，构成了3

阶、4 阶、5 阶、6 阶、7 阶、8 阶、9 阶的幻方，把它们分别命名为土星、木星、火星、太阳、金星、水星和月亮。图 1-29 就是阿格里派在其 1534 年出版的《玄奥的哲学》（De Occulta Philosophia）一书中给出的被命名为木星的 4 阶幻方和被命名为火星的 5 阶幻方。我们仔细看一下就会发现，阿格里派的 4 阶幻方就是把杨辉的 4 阶幻方阴图顺时针转 90°形成的；5 阶幻方是用连续摆数法构成的，并无特别的奇妙之处。但同中国一样，幻方在欧洲当时也被神秘化了，因此，在阿格里派的幻方四周都有代表西方保护神的魔符及相关的星座的标记，例如在 5 阶幻方的周围的保护神是格拉菲尔（Graphiel）和巴扎贝尔（Barzabel），相应的星座为天蝎座（Scorpio）和白羊座（Aries）。上述 4 阶幻方翻印自《象征性符号百科全书》（The Encyclopedia of Symbols，Continuum，1994），而 5 阶幻方翻印自《秘传知识百科全书》(The Encyclopedia of Secret Knowledge，Rider Books，1995)。

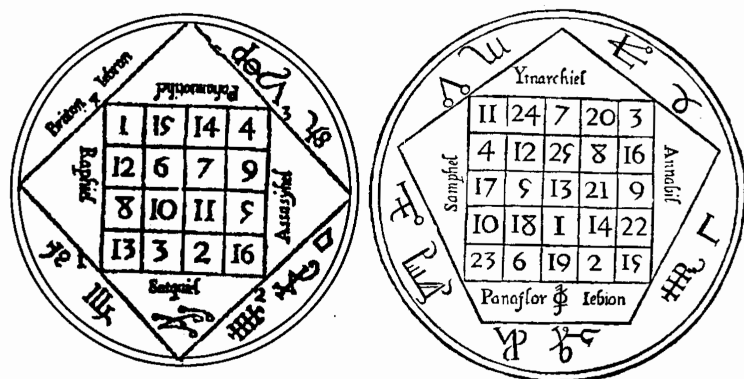
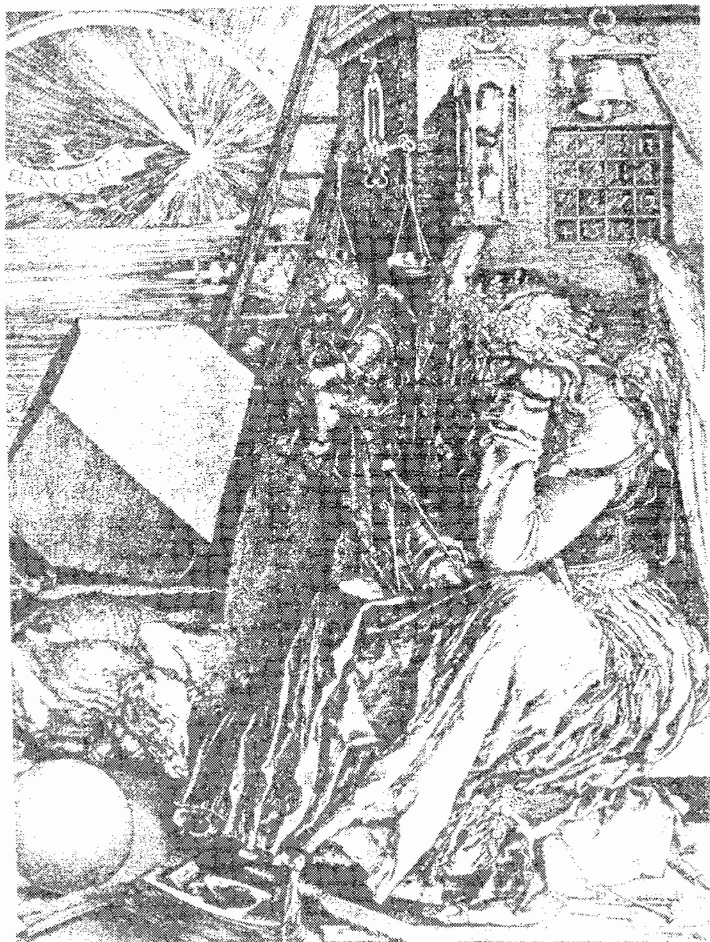


图 1-29　阿格里派的 4 阶和 5 阶幻方

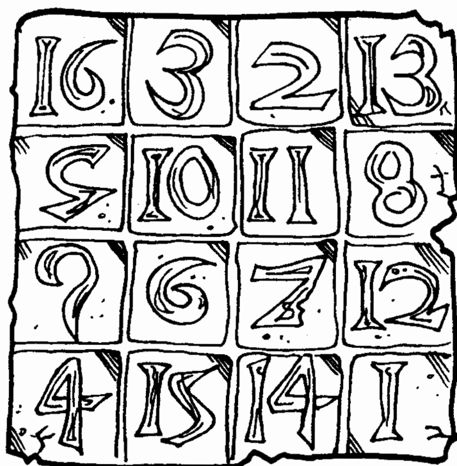
而比阿格里派更早的是德国的画家和文艺理论家丢勒（Albrecht Dürer），他在 1514 年创作的一幅铜版雕刻画《忧伤》（Melancholia），见图 1-30(a)。该画现藏大英博物馆。

丢勒的《忧伤》中，右后方墙上挂有一个 4 阶幻方，见

图 1-30(b),其左侧还有一个多面体，左下方还有一个球体，此外还有一些作图和制作工具。后世的学者们认为，这幅画的主题是反映人们对没有足够的知识和智慧去洞察自然界奥秘的“忧伤”，而画的本身也包含着许许多多的奥秘，比如那个幻方，那个多面体，那个球和球上面的怪兽，几百年来众多学者纷纷著文试图解开其中的奥秘，但至今没有令



(a)　丢勒的名画《忧伤》



（b）《忧伤》中的幻方（放大图）

图 1-30 《忧伤》及其幻方

大家满意的解释。像那个多面体，1999 年 11 月的国际数学史杂志《Historia Mathematica》上还有德国学者探讨其谜底的论文。我们这里只说说那个幻方。

仔细分析一下，我们可以看出：

（1）丢勒的这个幻方是将杨辉 4 阶幻方阴图旋转 90°，使行变为列，然后 2、3 列对换而形成的。

（2）丢勒幻方中能使线和方构成幻方常数的组合数也有 60 对，与杨辉 4 阶幻方的阴图持平。

（3）由于丢勒幻方是将杨辉幻方阴图的行列互换而形成的，因此，它的 1、4 行；2、3 行；1、4 列；2、3 列上 4 个数字的平方和也都是相等的，1、3 象限；2、4 象限中 2 个小方阵中 4 个数字的平方和也都是相等的，从而幻方的上半部和下半部；左半侧和右半侧；2 条对角线和非对角线 8 个数字的平方和都是相等的，等于 748；不但如此，2 条对角线和非对角线各 8 个数字的立方和也是相等的，等于9248。这一条和杨辉幻方一致。

(4) 如果把丢勒幻方中的各个数字都减去 1 并以 4 位二进制表示，则如果把幻方顺时针方向转 45°，形成如图 1-31 布局，可以发现对中央垂线，其左右两半是互为镜像的。例如第二排左边为 0100，右边则为 0010，十分对称。而如果将幻方按逆时针方向转 45°，形成如图 1-32 的布局，则对中央垂直线，其左右两半是镜像互补对称的，例如，第二排的左边是 0001，而右边是 0111（0001 的镜像是 1000，其补为 0111）。

			1111			
		0100		0010		
	1000		1001		0001	
0011		0101		1010		1100
	1110		0110		0111	
		1101		1011		
			0000			

图 1-31　丢勒幻方右旋 45°的二进制形式

据《数的奇迹》(Clifford A. Pickover, Wonders of Numbers, Oxford Uni. Pr. , 2001) 一书介绍，丢勒幻方的上述特性是来自威斯康辛州首府麦迪逊的作者同事马克·柯林斯（Mark Collins）发现的。

			1100			
		0001		0111		
	0010		1010		1011	
1111		1001		0110		0000
	0100		0101		1101	
		1000		1110		
			0011			

图 1-32　丢勒幻方左旋 45°的二进制形式

（5）柯林斯还发现了丢勒幻方（减 1 以后）的另一个奇特之处，即如果把幻方中的奇数和偶数分别连接起来，那么就会形成图1-33中所示形状的几个交叉的六边形，呈现出明显的对称性。而如果把 0—1—2—3，4—5—6—7，8—9—10—11，12—13—14—15 也分别连接起来，也会形成十分对称的图案，如图1-34。

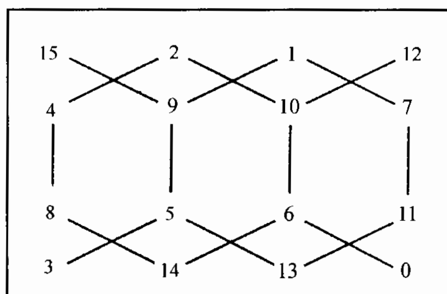


图 1-33　丢勒幻方中奇、偶数分别互连形成图案

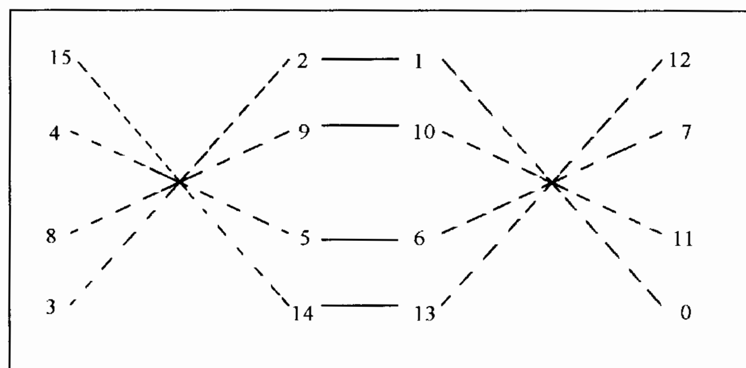


图 1-34　0 ~ 15 分 4 组互连以后的丢勒幻方图案

（6）除了以上奇特性质外，丢勒幻方另一个令人不解之谜是：幻方最下边一行中间两个数字15和 14 合在一起，正是丢勒创作这幅画的年代：1514 年。这是丢勒的巧妙安排还是偶然巧合，恐怕世人永远不

得而知了。

1.6 富兰克林的神奇幻方

中国人发明的幻方传入欧洲以后，经由欧洲殖民者又传入美洲大陆，同样使那里的人如醉如痴。其中，本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin，1706～1790）是最痴迷的一位，也是在构造高阶幻方上做出了特殊贡献的一位。富兰克林是英国移民的后裔，从小就当印刷工，但出于对人类的热爱，对自然的热爱，对科学的热爱，加上为人正直，勤奋好学，他成为美利坚合众国建国前后著名的政治家、外交家、作家、科学家和发明家，是美国独立战争的重要领导人，独立宣言和美国宪法的起草人之一，曾多次出使伦敦，与英国政府谈判。他又是冒着生命危险，在雷雨天气中进行著名的“费城实验”，证实了雷电实质，为电学的建立做出了诸多贡献的先驱，并有大量的发明创造。富兰克林自愧“没有学好数学”，但却构造出了许多神奇的幻方，令人叹服。据说他当选国会议员以后，在闲暇时间里，就一心琢磨幻方。我们这里只简单介绍一下富兰克林开发的一个 8 阶幻方和一个 16 阶幻方，就足可表明他在这方面的天才。

富兰克林的 8 阶幻方如图 1-35。如果我们仔细分析一下，就会发现它虽然不是完全幻方（对角线上 8 数之和并非 260），但设计得十分精巧，呈现出极大的对称性和匀称性，因此除了 8 行 8 列 8 数之和是幻方常数 260 之外，还有如我们前面所定义的，有许许多多的折（曲）对角线、折（曲）行、折（曲）列上 8 数之和是 260，还有许许多多的规则四边形的 4 顶点上 4 数之和是幻方常数之半，而 2 个对称的这样的四边形的 8 个顶点上的 8 数之和又形成幻方常数。这个幻方的对称性可通过以下两张表格表 1-5 和表 1-6 来反映。

现在，我们先考察一下富兰克林 8 阶幻方在横向的对称性。

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

图 1-35 富兰克林的 8 阶幻方

从表 1-5 中，我们看到，在幻方的横向任取 2 列，总能找到相应 2 列，其两两之和为幻方常数之半 130，剩下 4 列两两之和也为幻方常数之半 130。这样的对称组共有 7 个。在每一个这样的对称组中，任取一行前 4 列（指表中排在前面的 4 列，而非幻方中前 4 列。下同）和任意另一行中其他 4 列均可构成满足幻方常数的折行，如第 1 组中的（53，60，5，12，23，26，39，42），第 4 组中的（14，8，57，51，46，40，25，19），第 6 组中的（11，63，2，54，18，38，27，47）……这样的折行共有 7 ×8 ×7 = 392。

我们再看第 2 组。这一组中，每一行的 1、3 列和 5、7 列的数字和是相等的，2、4 列和 6、8 列的数字和也是相等的。这样，对于这个组，除了上述所有组共有的构成折行的方法外，还有以下方法，即任取一行的最前 2 列和最后 2 列，同任意另一行的其他 4 列，也可构成满足幻方常数的折行，例如（14，6，62，54，43，35，27，19）。这样的折行共有 8 ×7 =56。

再看第 1 组、第 5 组和第 7 组，其单数行的两两之和以及双数行的两两之和都是对应相等的，而单、双数行之间，其两两之和又交叉相等，如第 1 组单数行 1、2 列之和同双数行 3、4 列之和相同，都是 113，而单数行 3、4 列之和则同双数行 1、2 列之和相同，都是 17。5、6 列同 7、8 列之间也有类似情况。这样，对于这 3 个组，除了可以以各组

表 1-5　富兰克林 8 阶幻方的横向对称性

组 / 数字和 / 行	1				2				3				4			
	1、2列	3、4列	5、6列	7、8列	1、3列	2、4列	5、7列	6、8列	1、4列	2、3列	5、8列	6、7列	1、5列	4、8列	2、6列	3、7列
1	113	17	49	81	56	74	56	74	65	65	65	65	72	58	90	40
2	17	113	81	49	76	54	76	54					60	70	38	92
3					58	72	58	72					74	56	88	42
4					70	60	70	60					54	76	44	86
5	（单数行同 1，双数行同 2）				62	68	62	68	（同上方）				78	52	84	46
6					66	64	66	64					50	80	48	82
7					52	78	52	78					68	62	94	36
8					80	50	80	50					64	66	34	96

组 / 数字和 / 行	5				6				7			
	1、6列	3、8列	2、5列	4、7列	1、7列	4、6列	2、8列	3、5列	1、8列	3、6列	2、7列	4、5列
1	81	49	81	49	88	42	106	24	97	33	97	33
2	49	81	49	81	44	86	22	108	33	97	33	97
3					90	40	104	26				
4					38	92	28	102				
5	（单数行同 1，双数行同 2）				94	36	100	30	（单数行同 1，双数行同 2）			
6					34	96	32	98				
7					84	46	110	20				
8					48	82	18	112				

共有方法构成满足幻方常数的折行外，还可以用以下方法构成折行：任取单（或双）数行中的前2列和任意单（或双）数行中的后随2列以及任意单数行中的再后面2列和任意单数行中的最后2列，或者是任意双数行中的再后面2列和任意双数行中的最后2列，均可构成满足幻方常数的折行，例如第1组中的（52，61，5，12，23，26，34，37），第5组中的（53，3，7，15，46，28，34，42），第7组中的（16，60，57，10，23，40，37，17）。这样的折行共有 $3\times8\times8\times4\times4=3072$。

再看第3组，这一组中每行1、4列，2、3列，5、8列，6、7列两两之和都是65。因此，分别在任意某一行上取1、4列，2、3列，5、8列和6、7列均可构成满足幻方常数的折行，例如（52，60，5，13，23，31，34，42），（50，58，7，15，21，26，39，44）等。这样的折行共有 $8\times8\times8\times8=4096$ 个，扣去前面已提到过的1、4列和2、3列在同一行，5、8列和6、7列在同一行的情况56种，此组新产生折行4040个。

大家看，由横向对称性，富兰克林8阶幻方能形成的折行是多么多！由纵向对称性形成折列的情况请读者根据表1-6自行进行，其中只有第6对称组和其他组稍有不同，不能把一列分成两半，和为相等的130，而只能分为132和128的两半（一半多2，另一半少2），但依然可以组成许多满足幻方常数的折列。

由于富兰克林8阶幻方在纵向和横向上的这些对称性，除了大量折行、折列以外，在幻方任意位置上取 2×2 的小方阵，其4数之和均为130；4顶角之和也是130；而最为奇特的是，如果我们在这个方阵中画出所有的对角线，那么我们可以看到，它的4条“曲对角线”（即位于上半部的V形，位于下半部的倒V形，位于左半部的>形和位于右半部的<形）上8数之和都是260，而所有和这4个不同方向的V形相并行的V形上的8数之和也都是260，包括在对角线长度不足以覆盖4个方格时，用折对角线方式补足。在图1-36的（a）、（b）、（c）、（d）中分别用不同深浅的阴影表示4个不同方向的V形曲对角线和与它平行的

表 1-6　富兰克林 8 阶幻方的纵向对称性

组	1				2				3				4				5				6				7			
数字和 / 列	1、2行	3、4行	5、6行	7、8行	1、3行	2、4行	5、7行	6、8行	1、4行	2、3行	5、8行	6、7行	1、5行	2、6行	3、7行	4、8行	1、6行	3、8行	2、5行	4、7行	1、7行	2、8行	4、6行	3、5行	1、8行	3、6行	2、7行	4、5行
1	66	64	64	66	105	25	105	25	63	67	71	59	107	23	103	27	61	69	69	61	102	30	20	108	68	62	64	66
2	64	66	66	64	121	9	121	9	67	63	59	71	119	11	123	7	69	61	61	69	124	4	14	118	62	68	66	64
3	（单数列同1，双数列同2）				9	121	9	121	（单数列同1，双数列同2）				11	119	7	123	（单数列同1，双数列同2）				6	126	116	12	（单数列同1，双数列同2）			
4					25	105	25	105					23	107	27	103					28	100	110	22				
5					41	89	41	89					43	87	39	91					38	94	84	44				
6					57	73	57	73					55	75	59	71					60	68	78	54				
7					73	57	73	57					75	55	71	59					70	62	52	76				
8					89	41	89	41					87	43	91	39					92	36	46	86				

V 形对角线，以（a）为例，除了完整的 5 个 V 形外，还有 3 个以折对角线方式补足的 V 形，即（16，61，62，12，21，35，36，17），(50，1，4，51，46，29，32，47）和（9，63，64，13，20，33，34，24），共计 8 个，与此类似的其他方向的 3 组 V 形，也各有 8 个，因此共有 32 个。

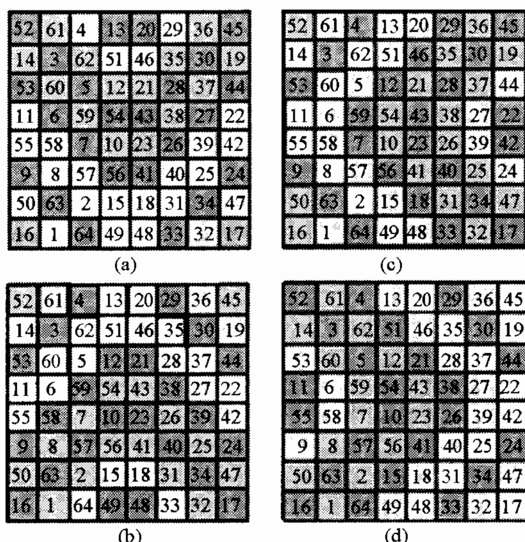


图 1-36　富兰克林 8 阶幻方中满足幻方常数的 V 形图案

富兰克林对他的 8 阶幻方曾经自豪而神秘地宣称，其中包含着“5 个神奇的特点”（five other curious properties），但是没有明确地说出这 5 个特点，这成为后人探索的目标。我们前面对它做了比较细致的分析，但也未必穷尽了富兰克林埋藏在其中的 5 个奥妙，有兴趣的读者不妨继续深挖。

富兰克林还构成了与上述 8 阶幻方有类似特性的 16 阶幻方，见图 1-37。它也不是完全幻方，因为 2 条主对角线上 16 数之和不等于幻方常数 2056，而分别是 2064（多 8）和 2048（少 8）。但这一“牺牲”同样带来了它的许多对称特性：任意半行半列 8 数之和均为幻方常数之

半，在幻方任意位置上任取 4 ×4 方阵其 16 数之和等于 2056，4 条 V 形曲对角线及与之平行的 V 形图案上 16 数之和均等于 2056……如果我们把幻方中的数从 1 到 256 用直线连起来，我们可以惊奇地发现它形成 2 个完全对称的图案，如图 1-38。如果换一种方式，单单把奇数（从 1 到 255）或偶数（从 2 到 256）连起来，它们也是很有规则的图案，读者可以自己做一下。

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

图 1-37　富兰克林的 16 阶幻方

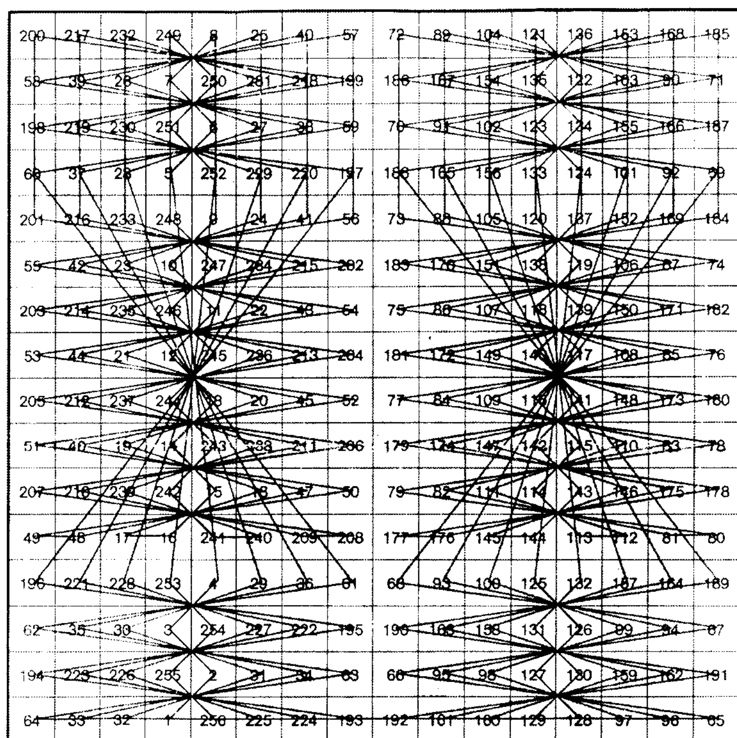


图 1-38　把富兰克林 16 阶幻方中的数顺序相连所形成的奇特图案

2 怎样构造幻方

在对于幻方的研究中，首先一个问题当然是如何构造幻方。从理论上说，幻方可以通过拉丁方很容易地获得。所谓拉丁方（Latin square）是在由 n 个记号构成的集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中，每个记号各取 n 回，共 n^2 个，排列成 n 行 n 列的方阵，使各行各列上 A 的每个记号各出现一次，称为 n 阶拉丁方。如果集合 A 中的记号取 n 进制数中的 n 个数，那么由此构成的 n 阶拉丁方就可以很容易地转换成 n 阶幻方。例如，对4 阶的情况，先用四进制中的0、1、2、3 这4 个数构成如图2-1(a) 的拉丁方，把其中的每个数变成相应的十进制数再加1，就变成图 2-1(b) 所示的4 阶幻方了。有许多复杂的高阶幻方就是通过拉丁方构成的。

21	33	00	12
02	10	23	31
13	01	32	20
30	22	11	03

(a)

10	16	1	7
3	5	12	14
8	2	15	9
13	11	6	4

(b)

图 2-1　由 n 阶拉丁方生成 n 阶幻方

值得高兴的是，除了通过拉丁方构成幻方以外，在幻方构造法的研究方面，已经取得了很大进展，有很大成绩。至今为止，已经发现了许多巧妙不同的幻方构造方法。本章将介绍一些著名而常用的幻方构造法。先介绍适用于构造奇数阶幻方的方法。

2.1 连续摆数法（暹罗法）

连续摆数法（continuous numbering method）是比较古老的一个方

法，是谁发现的已无从考证，但可以肯定是亚洲人的功劳，因为欧洲人知道这个方法是 1687 年由法国驻泰国大使洛贝利（de La Loubère）从泰国带回法国从而传播开来的，这是有案可查，不容置疑的。因此这个方法在西方又被叫做“暹罗法”（Siamese method）。

连续摆数法适用于奇数阶幻方的构造。其法则如下：

把 1 放在中间一列最上边的方格中，从它开始，按对角线方向（比如说按从左下到右上的方向）顺次把由小到大的各数放入各方格中，如果碰到顶，则折向底；如果到达右侧，则转向左侧，如果进行中轮到的方格中已有数或到达右上角，则退至前一格的下方。

按照这个法则建立 5 阶幻方的示例如图 2-2。

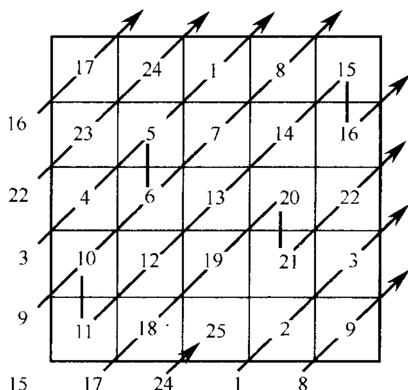


图 2-2　用连续摆数法构造 5 阶幻方示例

这个方法可以推广到一般情况，即起始数 1 不一定非摆在第一行中间，下一个数也不一定非摆在上一个数的右上方格，而摆在比如上一个数的左下方格，即使图 2-2 中箭头的方向相反，或者一次跨过 2 行或 2 列等等。为此我们定义一个“普通向量”（ordinary vector）(x, y)，表示在正常走步（normal move）情况下的偏置量。定义一个“中断向量”（break vector）(u, v) 表示发生冲突时的偏置量，即异常走步（break move）。在上述标准摆数法中，普通向量是（1，-1），中断向量是（0，

1)，表示右上方方格和直接下方方格。为了使推广的连续摆数法能生成幻方，显然必须使每一个异常走步能在空格中完成。但这一条件有时无法满足，因此这一方法的推广是受到限制的而不是任意的。为了考察哪些奇数阶幻方可以用怎样推广的连续摆数法实现，只要考察下面这一组“和差值”的绝对值就可以了，它们依次是$|u+v|$，$|(u-x)+(v-y)|$，$|u-v|$，$|(u-x)-(v-y)|$（或者$|u+y-x-v|$）。17 世纪的法国数学家菲利浦·德·拉伊尔（Phillipe de la Hire，1640 ~ 1718 年，我们后面还将看到他发明的另一个幻方构造法）详细地研究了连续摆数法的推广问题，并且发现，如果这一组“和差值”的绝对值（下面我们用 Sumdiffs 标记这个集合）相对于阶数 n 都是素数，则构成的幻方还一定是泛对角线幻方，即完美幻方。表 2-1 给出某些特定普通向量、中断向量和 Sumdiffs 值所适用的幻方。

图 2-3 给出用推广的连续摆数法所构成的 2 个奇数阶幻方。其中图 2-3（b）是一个 7 阶幻方，普通向量和中断向量同标准摆数法一样，但起始 1 在任意位置；图 2-3（a）是一个 5 阶幻方，其普通向量为（2，1），中断向量为（1，-1），Sumdiffs 为（0，1，2，3）其中的数对 5 都是素数，因此构成一个泛对角线幻方。

表 2-1　连续摆数法的推广

普通向量	中断向量	Sumdiffs	适用幻方	是否完美幻方
(1，-1)	(0，1)	(1，3)	$2k+1$	否
(1，-1)	(0，2)	(0，2)	$6k\pm1$	否
(2，1)	(1，-2)	(1，2，3，4)	$6k\pm1$	否
(2，1)	(1，-1)	(0，1，2，3)	$6k\pm1$	是
(2，1)	(1，0)	(0，1，2)	$2k+1$	否
(2，1)	(1，2)	(0，1，2，3)	$6k\pm1$	否

8	17	1	15	24
11	25	9	18	2
19	3	12	21	10
22	6	20	4	13
5	14	23	7	16

(a)

32	41	43	3	12	21	23
40	49	2	11	20	22	31
48	1	10	19	28	30	39
7	9	18	27	29	38	47
8	17	26	35	37	46	6
16	25	34	36	45	5	14
24	33	42	44	4	13	15

(b)

图 2-3　用推广的连续摆数法形成的幻方

2.2 阶梯法（楼梯法）

阶梯法(terraces method)也叫楼梯法(staircase method)，是法国数学家巴赫特（Bachet de Méziriac）创造的。这个方法把 n 阶方阵从四周向外扩展成阶梯状，然后把 $1\sim n^2$ 个自然数顺阶梯方向先码放好，再把方阵以外部分平移到方阵以内其对边部分中去，即构成幻方。这个方法十分简单而巧妙，适用于所有奇数阶幻方。图 2-4 和图 2-5 表示了如何用阶梯法构成 5 阶幻方。图 2-4 中顶边以上的 4、5、10 三个数在图2-5中被移入底边上方相应的 3 个原先为空的方格中，其余 3 侧照此处理。

				5				
			4		10			
		3		9		15		
	2		8		14		20	
1		7		13		19		25
	6		12		18		24	
		11		17		23		
			16		22			
				21				

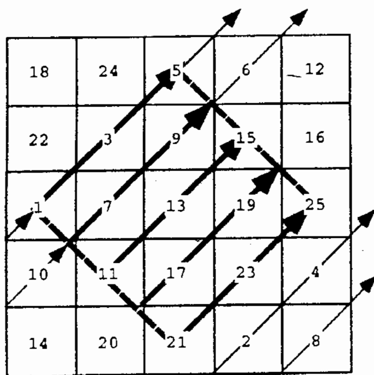
图 2-4　带 5 个台阶的方阵

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

图 2-5　把方阵外的数移至对边空格构成幻方

2.3 奇偶数分开的菱形法

当代数学家康韦（J. H. Conway）发明了一种将奇数集中在方阵中央，而将偶数分布在四角的方法来构成奇数阶幻方，他称之为“菱形法”（lozenge method）。如图 2-6，首先将奇数沿菱形的各平行边顺序排列好，然后将偶数沿这些边的延长线的方向顺序填入空格，回到这条边的起点时（设想把平面的方阵卷成圆柱），转移到下一条边，如此循环往返，就可构成幻方。图 2-6 中，奇数 1，3，5 这条边上填入 2、4，而 7、9 这条边上则填入了 6、8、10，如此等等。



18	24	5	6	12
22	3	9	15	16
1	7	13	19	25
10	11	17	23	4
14	20	21	2	8

图 2-6　菱形法构成幻方

意大利人瓦卡（Vacca）独立地发明了一种与康韦的菱形法十分相似的构造奇数阶幻方的方法，也是将奇数集中置于方阵的中央，但偶数的安置法与菱形法不同。瓦卡的方法是：对于四角中的方格，取与该方格相对的两个远端菱形内部方格中的奇数相加除以 2，填入该方格中。以左上角 3 个方格为例，其中与第一行第二个方格相对的菱形内部 2 个方格中的数是 23 与 25，因此填入 24。第一行第一个空格相对的菱形内部两个方格中的数是 17 和 19，因此填入 18。第二行第一个方格相对的 2 个方格是 21 和 23，因此填入 22。余类推。其结果与菱形法完全一致，

可谓殊途同归。图 2-7 是用菱形法或瓦卡的办法构造的 9 阶幻方，菱形中奇数的摆放方向与上述不同，这显然是无关紧要的。这个幻方中数的分布极有规律：尾数为 1 的集中在中间第 5 列，从上到下以递增顺序排列；尾数为奇数 3、5、7、9 的以同样顺序排列在第 6、7、8、9 列的菱形内部，排满后分别转到第 1、2、3、4 列继续排。尾数为 0 和 2 的集中在第 9 列和第 1 列，也是从上到下先排在菱形下部，排满后转到菱形上部；尾数为 4、6、8 的偶数以同样规律排在第 2、3、4 列，排满后转到第 6、7、8 列。

42	34	26	18	1	74	66	58	50
52	44	36	19	11	3	76	68	60
62	54	37	29	21	13	5	78	70
72	55	47	39	31	23	15	7	80
73	65	57	49	41	33	25	17	9
2	75	67	59	51	43	35	27	10
12	4	77	69	61	53	45	28	20
22	14	6	79	71	63	46	38	30
32	24	16	8	81	64	56	48	40

图 2-7　用菱形法构成的 9 阶幻方

下面介绍偶数阶幻方的一些构造方法。但偶数有双偶数和单偶数之分，所谓双偶数是 $n=2\cdot 2m$ 形式的偶数，即 4 的倍数，而单偶数是指 $n=2(2m+1)$ 形式的偶数，即是 2 的倍数但不是 4 的倍数。我们先介绍几个构造双偶数阶幻方的方法。

2.4 对称法

对于双偶数阶幻方，即 $n=2\cdot 2m$ 形式的幻方，有一个相当巧妙而简便的构造方法，叫对称法（symmetrical method）。我们以 8 阶为例说

明对称法，见图2-8。因为是双偶数阶，我们可以先把它分为上、下、左、右4个小方阵，这里是4个4×4的方阵。首先在左上角方阵中布点：每行每列任取一半（这里是两个）方格打上“○”号；然后将其向其余3个方阵映象，使每个小方阵中都各有一半方格被“○”所占据，如图2-8（a）。

○	2	○	4	5	○	7	○
9	○	11	○	○	14	○	16
17	○	19	○	○	22	○	24
○	26	○	28	29	○	31	○
○	34	○	36	37	○	39	○
41	○	43	○	○	46	○	48
49	○	51	○	○	54	○	56
○	58	○	60	61	○	63	○

（a）

64	2	62	4	5	59	7	57
9	55	11	53	52	14	50	16
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
49	15	51	13	12	54	10	56
8	58	6	60	61	3	63	1

（b）

图2-8　用对称法构造双偶数阶幻方

现在从左上角方格开始，按从左到右、从上到下的次序将1~64的值往方阵中填写，但遇到布了“○”点的方格，填写被封锁，即不填，跳过。这样，只有未布点的一半方格被填了数。这个过程结束以后，从右下角开始，用同刚才相反的方向再一次往方阵中填数，这次是填布了点的方格，已有数的方格被封锁不填。由于布点方法的对称性，第二遍填数正好用上第一遍填数中被跳过的数，使整个方阵填入的正是1~64，而且形成一个幻方！

显然，改变一下开始时布的点，即可获得另一个不同的幻方。

2.5 对角线法

构造双偶数阶幻方还有一种有趣而简单的方法叫对角线法（diago-

nal method）。这种方法首先按从左到右、从上到下的次序把 $1\sim n^2$ 填入 n 阶方阵中，然后按一定规则交换对角线上的元素，即可形成幻方。例如，对于4阶的情况，只要把两条主对角线上的元素按中心对称原则互相交换就行，见图2-9。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

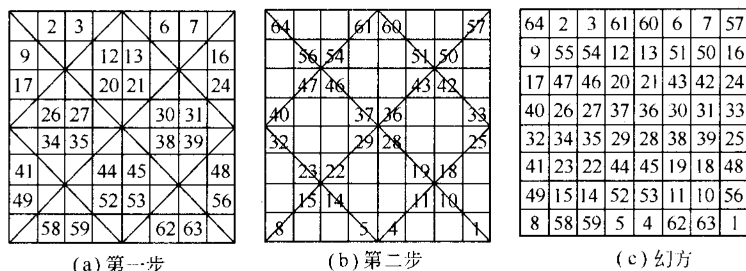
图 2-9　用对角线法构成 4 阶幻方

对于8阶的情况，除了要按同样方法交换2条主对角线上的元素外，还要交换2条折对角线上的元素，方法是：先把处于同一直线上的半条折对角线上的元素整个调个头，即原来是左上的变成右下，原来是右下的变成左上；原来是右上的变成左下，原来是左下的变成右上。然后把同一折对角线上下两部分互相交换位置，这就得到了8阶幻方。如图2-10的8阶幻方，原先就是按从左到右、从上到下顺次填入1~64的数字方阵，然后按上述方法交换2条主对角线和2条折对角线上的数字而形成的。

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图 2-10　用对角线法构成 8 阶幻方

对角线法还有以下一种更为简便易行的实行方法：先把方阵分成若干4×4的小方阵，在每个小方阵中都画上2条主对角线，然后按从上到下、自左至右的次序在方阵中填入1～n^2，但只填对角线不穿越的方格，凡有对角线通过的方格则跳过，其次按自下而上、自右至左的相反方向重复这一过程，但这次只填对角线穿越的方格，而跳过对角线不经过的方格（这些方格中已经有数字）。这样形成的必是幻方。图2-11中给出了用这个方法形成8阶幻方的过程。显然，对角线法是对称法的特例，即对称法若按对角线布点，也就是对角线法。



(a)第一步　(b)第二步　(c)幻方

图2-11　对角线法的另一实现方法

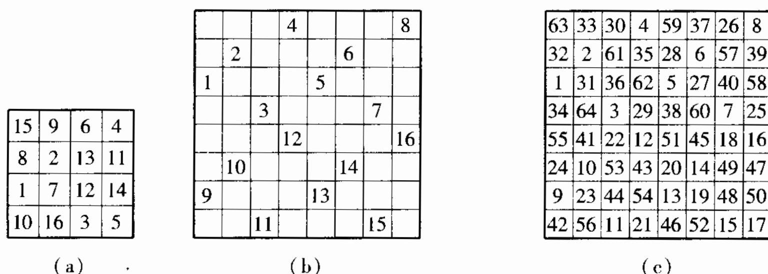
2.6 比例放大法

适用于构造双偶数阶幻方的方法还有中世纪印度数学家弗茹（Thakkura Pherū）所发明的比例放大法（这个名称是笔者起的）。弗茹是印度研究幻方的第一人，其有关著作出版于1315年。

弗茹的方法是基于已知的n阶幻方构造出$2n$阶幻方来。其过程如下。设已知4阶幻方如图2-12（a），则先画出一个8阶空方阵，并把它一分为四，我们把左上角、右上角、左下角、右下角分别叫做方阵Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ。第一步，把1～4，5～8，9～12,13～16这4组数按1、2、3、4在4阶幻方中的位置分别填入方阵Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，如图2-12（b）。第二步，把接下去的17～20，21～24，25～28，29～32这4组数

按5、6、7、8在4阶幻方中的位置相应填入方阵Ⅳ、Ⅲ、Ⅱ、Ⅰ，其顺序恰好和前一组相反。其后2步仿照前2步把33～64再填入方阵，8阶幻方就构成了，如图2-12(c)。

显然，这种方法只适用于n是偶数的情况。



(a)

15	9	6	4
8	2	13	11
1	7	12	14
10	16	3	5

(b)

			4				8
	2				6		
1				5			
		3				7	
			12				16
	10				14		
9				13			
		11				15	

(c)

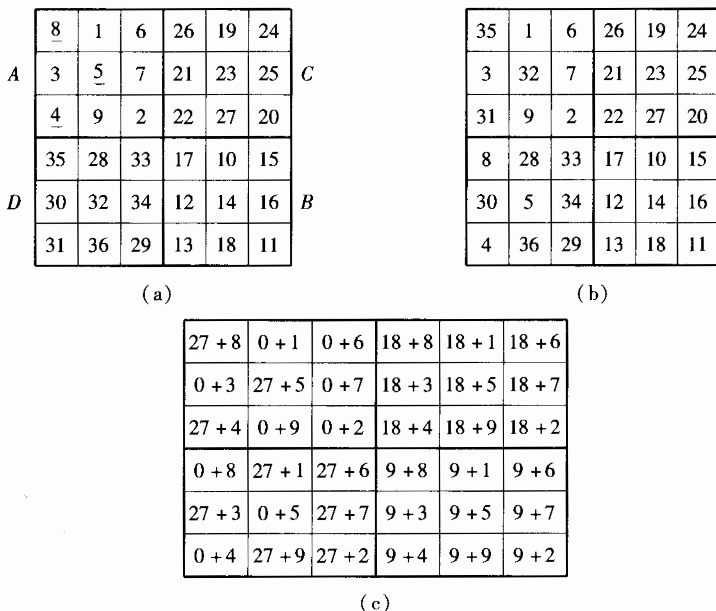
63	33	30	4	59	37	26	8
32	2	61	35	28	6	57	39
1	31	36	62	5	27	40	58
34	64	3	29	38	60	7	25
55	41	22	12	51	45	18	16
24	10	53	43	20	14	49	47
9	23	44	54	13	19	48	50
42	56	11	21	46	52	15	17

图2-12　用比例放大法依据4阶幻方构成8阶幻方

2.7 斯特雷奇法

说来奇怪，在幻方构造法的研究中，奇数阶幻方和双偶数阶幻方的构造法早就有了很多成果，而对单偶数阶幻方，即阶数$n=2(2m+1)$形式的幻方，人们长期没能找到一个有效的构造方法。直到20世纪初，即1918年，数学家斯特雷奇（Ralph Strachey）经过不懈努力，才发明了构造单偶数阶幻方的一般方法。这个方法是这样的：把$n=2(2m+1)$阶的方阵先均分成4个同样的小方阵A、B、C、D。先按前述连续摆数法在A、B、C、D中构成4个奇数阶幻方，其中A用数字$1\sim a^2$，B用数字$(a^2+1)\sim 2a^2$，C用数字$(2a^2+1)\sim 3a^2$，D用数字$(3a^2+1)\sim 4a^2$，而$a=\frac{n}{2}$。这样形成的总方阵在列的方向上已经满足幻方条件，见图2-13（a），但行的方向和对角线是不满足的，需要进行调整。怎样调整呢？先在A的中间一行上从左侧的第二列起取m个方格，在其他行上则从左侧第一列起取m个方格，把这些方格中的数字同D中相应方格中的数字对调；然后在C中从最右一列起在各行中取$m-1$个方

格，把这些方格中的数字同 B 中相应方格中的数字对换。经过这样调整以后，大方阵就变成幻方了。道理很简单：经过这样变换的 A、B、C、D 4 个方阵，可以看成是由 $1 \sim a^2$ 组成的 a 阶幻方，然后在其上用 0、a^2、$2a^2$、$3a^2$ 这 4 个数字，每个数字重复 a^2 次的一个特殊的 n 阶幻方迭加在一起所形成的，所以仍为幻方无疑。图 2-13（c）形象地对此给予了说明。图 2-13（c）的 A、B、C、D 4 个小方阵中原先都是放入 1 ~9 的 3 阶幻方，然后在 A 的每个单元中加 0，在 B 的每个单元中加 9（$=3^2$），在 C 的每个单元中加 18（$=2\times3^2$），在 D 的每个单元中加 27（$=3\times3^2$），再按斯特雷奇的法则把 A 中的 3 个 0 和 D 中的 3 个 27 对调，就形成图 2-13（b）的 6 阶幻方了。图 2-14 是用这个方法构成 10 阶幻方的示意图，其中需要交换的数字下方标了一道横线。在 6 阶情况下，A 中有 3 个数要同 D 交换；C、B 保持不变；在 10 阶情况下，A 中有 10 个数要同 D 交换，C 中有 5 个数要同 B 交换。



	8	1	6	26	19	24	
A	3	5	7	21	23	25	C
	4	9	2	22	27	20	
	35	28	33	17	10	15	
D	30	32	34	12	14	16	B
	31	36	29	13	18	11	

(a)

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

(b)

27 +8	0 +1	0 +6	18 +8	18 +1	18 +6
0 +3	27 +5	0 +7	18 +3	18 +5	18 +7
27 +4	0 +9	0 +2	18 +4	18 +9	18 +2
0 +8	27 +1	27 +6	9 +8	9 +1	9 +6
27 +3	0 +5	27 +7	9 +3	9 +5	9 +7
0 +4	27 +9	27 +2	9 +4	9 +9	9 +2

(c)

图 2-13　构造单偶阶幻方的斯特雷奇法

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	59
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

(a)

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

(b)

图 2-14　10 阶幻方的构成

由此可见，在用斯特雷奇法时，阶数愈高，需要交换的元素愈多，但规则是始终不变的，而且相当简单。

2.8 LUX 法

继斯特雷奇之后，剑桥大学的康韦（这是一位多才多艺的数学家，有多方面的创造，笔者在《ACM 图灵奖——计算机发展史的缩影》和

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

图 2-15　用 LUX 法构成奇偶数阶幻方的方法

《IEEE 计算机先驱奖——计算机科学与技术中的发明史》两本书中都曾提到过他）也发明了一种构造奇偶数阶幻方的巧妙方法。这个方法是这样的，为了构成 $2(2m+1)$ 阶的幻方，先构成一个 $(2m+1)$ 的方阵，方阵中上面 $m+1$ 行方格中央都标一个 L，接下去一行标 U，余下的 $m-1$ 行标 X。然后把中间那个 U 和它上面的 L 交换一下。接下去把中央标有字母的方格都用十字线分成 4 个小方格，使方阵变成所需的 $2(2m+1)$ 阶方阵，下一步就可以往方阵中填数了。怎么填呢？规则有 3：①填数从 1 顺序开始，每 4 个数为一组填入中央标有字母的一个单元即 4 个小方格中；②往 4 个小方格中填写数字的次序视方格中央标记的字母而不同，如图 2-15 左侧所示，这也是把这个方法叫做"LUX"法的原因所在；③填写大方格的顺序则用构造单数阶 $2m+1$ 阶幻方的连续摆数法确定，如在图 2-15 的例子中，要构造的是 10 阶幻方，则用构造 5 阶幻方的连续摆数法即图 2-2 的顺序，从顶行中央单元开始填数 1～4，接下去的 5～8 转至底行右 2 单元，如此等等。LUX 是光学中的照明单位，也是国际上一种著名化妆品的品牌（我国叫做"力士牌"），因此 LUX 法给人以深刻印象。

2.9 拉伊尔法（基方、根方合成法）

拉伊尔（Phillipe de la Hire）是 17 世纪的法国数学家，前面我们介绍过他对连续摆数法的推广，用于构造奇数阶幻方。这里介绍他发明的基方、根方合成法更可用于构造任意阶幻方，只是根据阶的情况，基方和根方的构造法有所不同而已。我们先介绍用拉伊尔法构造奇数阶幻方的法则。为了构造奇数 n 阶幻方，先在 n 阶的基方（primary square）中顺着第一主对角线放入 $1\sim n$，这些数叫基数（primary number）。顺着第二主对角线全部放数 $\left[\frac{n}{2}\right]+1$。$\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 n 被 2 除以后取其整数部分，所以实际上第二主对角线各方格中放的是基数 $1\sim n$ 的中数。基方中的其他所有方格也都放基数。怎么放法呢？要使各个次对角线（即折

对角线）上也分别是顺序的 $1\sim n$。由于第二主对角线上已全部放上 $[\frac{n}{2}]+1$，这样，其余方格哪个放哪个数自然也就确定了。

在 n 阶的根方（root square）中，沿着第二主对角线的方向顺次放入 0，n，$2n$，$3n$，$4n$，…，这些数叫根数（root number)，其一般表达式为 $n(p-1)$，其中 p 为基数，即从 1 到 n。沿着第一主对角线，所有方格中均放入 $n\cdot[\frac{n}{2}]$，$[\frac{n}{2}]$ 意义同上。根方的其他所有方格也都放根数，放法与基方类似，也是使各折对角线都形成 0，n，$2n$，$3n$，…的序列。

由基方和根方的构造法可以看出，在基方中，每行每列及一条主对角线上的数字恰好都是基数 1，2，3，…，n，其和为 $\frac{1}{2}n(n+1)$。另一条主对角线上均为基数的中数，共 n 个，所以其和也是 $\frac{1}{2}n(n+1)$。在根方中，每行每列及 1 条主对角线上的数字均为根数 0，n，$2n$，$3n$，…，$(n-1)n$，其和为 $\frac{1}{2}n^2(n-1)$，另一条主对角线上全是这个等差级数的中项，共 n 个，所以其和也是 $\frac{1}{2}n^2(n-1)$。这样，把基方和根方中对应方格中的数相加，填入一个空的 n 阶方阵中，各行各列及两条主对角线上数字之和 S 势必仍维持相等，且

$$S=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n^2(n-1)=\frac{1}{2}n(n^2+1)$$

这个数恰好等于幻方常数。另外，由于基数在基方中的分布及根数在根方中的分布方法，正好使各方格对应相加以后获得的数覆盖 $1\sim n^2$，无一重复，无一遗漏，也就是说正好构成一个 n 阶幻方。

用拉伊尔法构造 5 阶幻方如图 2-16。

用拉伊尔法构造偶数阶幻方时，基方中也全部填入基数，根方中也全部填入根数，这是一样的；但填法有所不同。以构造 6 阶幻方为例，

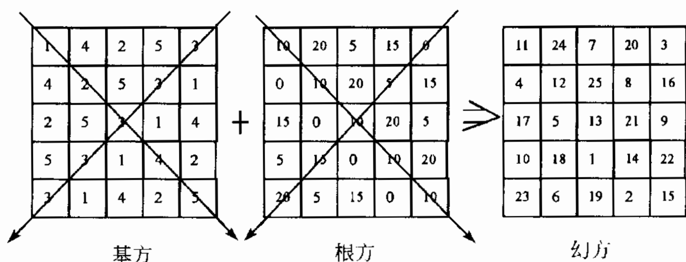


图 2-16　用拉伊尔法构造 5 阶幻方

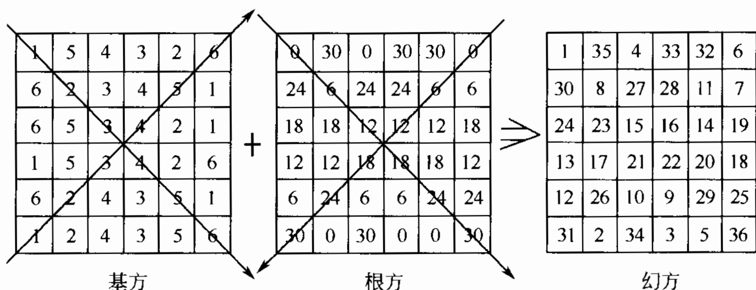


图 2-17　用拉伊尔法构造 6 阶幻方

如图 2-17，在基方中沿 2 条主对角线方向都放基数 1，2，3，4，5，6，但方向一是从上到下的，另一是从下到上的。其他方格怎么填呢？以对称的第1列和第6列为例，其四角分别是两个1和两个6，这样，在每列空下的 4 个方格中，分别填入3个6和1个1（或者是3个1和1个6），使这两列上都是3个6，3个1，填法任意，唯一的限制是这2列对应方格中的数字正好互补，即第1列某个方格中如果是 1，则第六列对应方格中应该是6，反则反是。

对基方的2、5列和3、4列按同样方法处理，即在2、5列中各填入 3 个 2，3 个 5；在3、4列中各填入3 个 3，3 个 4，对应方格均互补。

在根方的两条主对角线上都顺次填入根数，而且方向都是从上到下，根方的其他空格中用与基方类似的方法填入根数，但要按行的方向

处理，即第 1 行和第 6 行中各是 3 个 0，3 个 30，对应方格互补。2、5 行，3、4 行类似。然后把基方和根方合并就成为幻方，见图 2-17。

由此可见，用拉伊尔法构造偶数阶幻方时，基方中基数和根方中根数的布法虽然和奇数阶时不同，但基方常数仍为 $\frac{1}{2}n(n+1)$，根方常数仍为 $\frac{1}{2}n^2(n-1)$，把基方和根方对应空格中的数字相加起来时，仍然覆盖 $1\sim n^2$，无一遗漏，无一重复，从而形成常数为 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ 的幻方。

拉伊尔法的优点是通用于任意阶幻方的构造，只要记住对奇数阶和偶数阶幻方，构造基方和根方时基数和根数的布局方法有所不同即可。此外，在符合法则的前提下，适当调整基数和根数在基方和根方中的布局，就可获得一批幻方。

2.10 镶边法

至此，我们对奇数阶、单偶数阶、双偶数阶幻方都已介绍了一些构造方法，也就是说可以构造任意阶的幻方了，但是，对于构造不同阶的幻方，方法是不一样的；即使是用拉伊尔法，对奇、偶数阶幻方的构造，其基方和根方中基数和根数的分布也有不同的法则。有没有一种统一的方法可以构造任意阶的幻方呢？17 世纪的法国数学家弗兰尼克尔（Frénicle）经过苦心研究，终于找到了这样一种方法，即镶边法。他的方法是这样的：为了构成任意 n 阶的幻方，先构成 $n-2$ 阶的幻方，在其中每个方格的数上加一个整数，然后在它四周镶上一条边，填入余下来的数字使之成为幻方。这样，由已知的、比较容易构成的 3 阶幻方，可顺次构成 5 阶、7 阶、9 阶……幻方；从 4 阶幻方出发，可以顺次构成 6 阶、8 阶、10 阶……幻方。

镶边法需要解决的关键问题有两个。一个是对原始幻方各方格中的数加一个多大的整数？另一个是余下的数如何分布到外层的方格中去？

46	1	2	3	42	41	40
45	35	13	14	32	31	5
44	34	28	21	26	16	6
7	17	23	25	27	33	43
12	20	24	29	22	30	38
11	19	37	36	18	15	39
10	49	48	47	8	9	4

图 2-18　用镶边法构造 7 阶幻方

对第一个问题的回答比较简单。如果要构造的是 n 阶幻方，那么在原始的 $n-2$ 阶幻方中，各方格的数都加整数 $2(n-1)$。例如，对于图 2-18 所示的用镶边法构造 7 阶幻方的情况来说，中间的原始 5 阶幻方中本该是数 1～25，现在都加 $2(7-1)=12$，变成13～37。这样，这个 5 阶幻方的幻方常数成为 $\frac{1}{2}n(n^2+1)+2n(n+1)=125$。

对于第二个问题，中间（$n-2$）阶方阵中的数确定以后，周边方格中的数也就确定了。它们是 $1\sim2(n-1)$ 以及与之互补的 $n^2\sim(n^2-2n+3)$。对于 $n=7$ 的情况，是 1～12 和 49～38。这些数要按如下法则分配到周边的 $4(n-1)$ 个方格中去：使内层 $n-2$ 阶幻方每行每列和两条主对角线两端各是一对互补的数，从而使这些方向上的数字和恰为幻方常数 $\frac{1}{2}n(n^2+1)$；同时还要注意，互补数对的分布要使外层行列上数字之和也等于幻方常数。这一般可以通过试探法经过少数几次调整达到。数学家特莱佛（J. Travers）曾经总结出安排外层数字的一些规则，但这些规则都相当繁琐复杂，我们这里就不介绍了。

显然，用镶边法一圈加一圈形成的任意阶幻方，如果逐层地剥掉外圈，留下来的方阵仍然是一个个幻方，但数字不是从 1 开始的。

应该指出的是，数学书上目前把构造幻方的镶边法归功于弗兰尼克尔，但笔者认为，镶边法的发明实际上在弗兰尼克尔之前，是由亚洲人发明的。其证据是：我们在第一章中介绍的从长安安西王府遗址中发掘出来的铸铁片上的 6 阶幻方，如果仔细研究一下，就不难发现是一个地地道道的镶边幻方。而安西王是 13 世纪的历史人物，幻方所用符号则是古阿拉伯数字系统，可见亚洲人早在弗兰尼克尔之前就会用镶边法构造幻方了。这一观点现在也得到了西方学者的认可，如 2000 年出版的《非西方数学史》(The History of Non-Western Mathematics, Kluwer Academ-

ic Pub）就承认，阿拉伯人在10世纪前后即已掌握了镶边法（见该书第160页）。

2.11 相乘法

这里再介绍一个任意阶幻方的构造方法，它是20世纪90年代才开发出来的，发明者是艾伦·阿德勒（Allen Adler）。这个方法利用两个低阶幻方“相乘”产生一个高阶幻方。例如，我们有一个3阶幻方 A 和一个4阶幻方 B 如图2-19，那么就可以用以下办法把它们“相乘”

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

8	1	6	134	127	132	125	118	123	35	28	33
3	5	7	129	131	133	120	122	124	30	32	34
4	9	2	130	135	128	121	126	119	31	36	29
107	100	105	53	46	51	62	55	60	80	73	78
102	104	106	48	50	52	57	59	61	75	77	79
103	108	101	49	54	47	58	63	56	76	81	74
71	64	69	89	82	87	98	91	96	44	37	42
66	68	70	84	86	88	93	95	97	39	41	43
67	72	65	85	90	83	94	99	92	40	45	38
116	109	114	26	19	24	17	10	15	143	136	141
111	113	115	21	23	25	12	14	16	138	140	142
112	117	110	22	27	20	13	18	11	139	144	137

图2-19　通过将2个低阶幻方“相乘”获得一个高阶幻方

获得一个 12 阶的幻方 $C = A \cdot * B$：首先画一个空的 4×4 方阵，然后在 B 中找到 1 所处位置，在这里是左上角，于是就在这个空的方阵的左上角把 A 复制进来。再找到 2 在 B 中的位置，在空方阵的这个位置把 A 的所有元素加 9 以后复制进来。如此往下进行，一般而言，对于 x 在 B 中所处位置，在空方阵该位置拷贝 A 时，A 的各元素都要加 $9(x-1)$。这个过程结束以后，空方阵就成为一个 12 阶幻方。显然，组成它的 16 个 3 阶方阵都是 3 阶幻方。

阿德勒证明，这个方法可以循环使用，即利用这个方法将 2 个低阶幻方相乘获得一个高阶幻方以后，可以将它再和一个低阶幻方相乘以获得更高阶的幻方，而且这种相乘运算是满足结合律(associative law)的，即 $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$。但这个方法不满足交换律，即 $B \times A \neq A \times B$。然而如果 A 或 B 之一是"平凡幻方" 1 (trivial magic square)，即只包含数 1 的一阶幻方，那么有 $A \times I = I \times A = A$。

我们把用这个办法产生的幻方 $C = A \times B$ 叫做"合成幻方"(composite magic square)。如果 C 不是用这种办法产生的，那么叫做"质幻方"(prime magic square)。

这个办法也可用于一个已知幻方的"自乘"。图 2-20 就是通过将洛书 3 阶幻方自乘而获得的 9 阶幻方。

31	36	29	76	81	74	13	18	11
30	32	34	75	77	79	12	14	16
35	28	33	80	73	78	17	10	15
22	27	20	40	45	38	58	63	56
21	23	25	39	41	43	57	59	61
26	19	24	44	37	42	62	55	60
67	72	65	4	9	2	49	54	47
66	68	70	3	5	7	48	50	52
71	64	69	8	1	6	53	46	51

图 2-20　3 阶幻方"自乘"获得 9 阶幻方

2.12 幻方模式

以上我们介绍的形形色色的幻方构造法，都是用来构造正规幻方的，也就是说幻方中的数是从 1 开始的连续数。如果不要求正规幻方，可以用非连续数列，应该怎样构造呢？这时，人们往往利用幻方模式（magic square pattern）或称幻方模板（magic square temple），也就是根据幻方中行、列、对角线上数字和相等的条件，为方阵中所有单元列出变量式，然后用一组确定的值代替这些变量就可获得一个幻方，换一组值就可以获得又一个幻方。人们已经为几乎所有阶的幻方都设计出了许多模板，它们也都十分精巧。下面我们举一个 4 阶泛对角线幻方的模板作为示例，后面我们还将看到一些特殊的模板。

在图 2-21 所示的 4 阶泛对角线幻方的模板中，$X=x+y+z+u$，因此实际上变量只有 5 个，即 x，y，z，u 和 t。它的巧妙之处在于，第一

x	y	z	u
$z-t$	$u+t$	$x-t$	$y+t$
$\frac{1}{2}X-z$	$\frac{1}{2}X-u$	$\frac{1}{2}X-x$	$\frac{1}{2}X-y$
$\frac{1}{2}X-x+t$	$\frac{1}{2}X-y-t$	$\frac{1}{2}X-z+t$	$\frac{1}{2}X-u-t$

图 2-21　一个 4 阶泛对角线幻方的模板

行 4 个元素只和 x，y，z，u 有关，第二行加进了 t，第三行又没有 t，但都和 x，y，z，u 和 X 有关，第四行才和 x，y，z，u 及其和以及 t 都有关，非常有规律。仔细验证一下，各行、各列、2 条主对角线及 4 条折对角线上 4 元素之和都等于 X，因此用任意的 x，y，z，u，t 组合代入，都可获得一个泛对角线幻方，而且其幻和只和 x，y，z，u 有关，而同 t 无关。

$a+b$	$a-b-c$	$a+c$
$a-b+c$	a	$a+b-c$
$a-c$	$a+b+c$	$a-b$

图 2-22　鲁卡斯建立的 3 阶幻方模板

至于 3 阶幻方的模板，以 19 世纪的法国大数学家鲁卡斯（Edouard Lucas）所给出的一个最为精巧，见图 2-22。确立一组 a、b、c 的值就可获得一个 3 阶幻方，其幻方常数为 $3a$。

3 幻方数量知多少

人类在探索科学奥秘的过程中，有一种“寻根问底”的倾向。对于幻方，人们也总是想把各阶幻方的所有可能形式全都找出来。这样，首先就要弄清楚对于任意 n 阶幻方来说，它总共有多少个可能的形式？这就是数学家和数学爱好者在研究幻方中力求解决的第二个问题。本章就来介绍有关这个问题的一些情况。

3.1 3 阶幻方的数量

对于最简单的 3 阶幻方，这个问题是容易回答的。因为 3 阶幻方的幻方常数是 15，而从 1 ~ 9 中取 3 个数使其和等于 15 只有以下 8 种可能，即

$$1+5+9=15$$
$$1+6+8=15$$
$$2+4+9=15$$
$$2+5+8=15$$
$$2+6+7=15$$
$$3+4+8=15$$
$$3+5+7=15$$
$$4+5+6=15$$

在这 8 个等式中，奇数 1、3、7、9 各出现 2 次，偶数 2、4、6、8 各出现 3 次，奇数 5 出现 4 次。这样，为了构成 3 阶幻方，显然只能将 5 置于中间方格，将 2、4、6、8 分置于四角，而 1、3、5、7 只能放在靠边的 4 个中央方格中了。因此，3 阶幻方只有 1 个基本形式，通过将方阵

旋转与反射，可得 8 种变形，但它们其实都是同构的(isomorphic)。

3.2 4 阶幻方的数量

对于 4 阶幻方，由于不算复杂，可以用穷举法来获得其所有可能形式。实际上，早在 1693 年，弗兰尼克尔（Bernard Frenicle de Bessy）就已得出 4 阶幻方总共有 880 个基本形式，通过方阵的旋转与反射，总共可有 7040 个不同形式的结论。这个结论是完全正确的，没有异议的。日本的下列网站上给出了全部 880 个 4 阶幻方，有兴趣的读者可以访问它：http://www.pse.che.tohoku.ac.jp/~msuzuki/MagicSquare.4×4.total.html。

对于 4 阶幻方的数量，杜德尼（H. E. Dudeney）详细地研究了它的分类和每类幻方可能有的数量。在把幻方分为简单、半 NASIK、关联（对称）、NASIK（泛对角线）四大类的基础上，杜德尼又进一步根据互补数字对的分布情况，把 4 阶幻方细分为 12 类，如图 3-1。杜德尼给出的各类 4 阶幻方的数量如下

NASIK 幻方（Ⅰ型）		48
关联幻方（Ⅲ型，同时也是半 NASIK 的）		48
半 NASIK 幻方（Ⅱ型）		48
	(Ⅳ型)	96
	(Ⅴ型)	96
	(Ⅵ型)	96
简单幻方	(Ⅵ型)	208
	(Ⅶ型)	56
	(Ⅷ型)	56
	(Ⅸ型)	56
	(Ⅹ型)	56
	(Ⅺ型)	8

(XII型)	8
总计	880

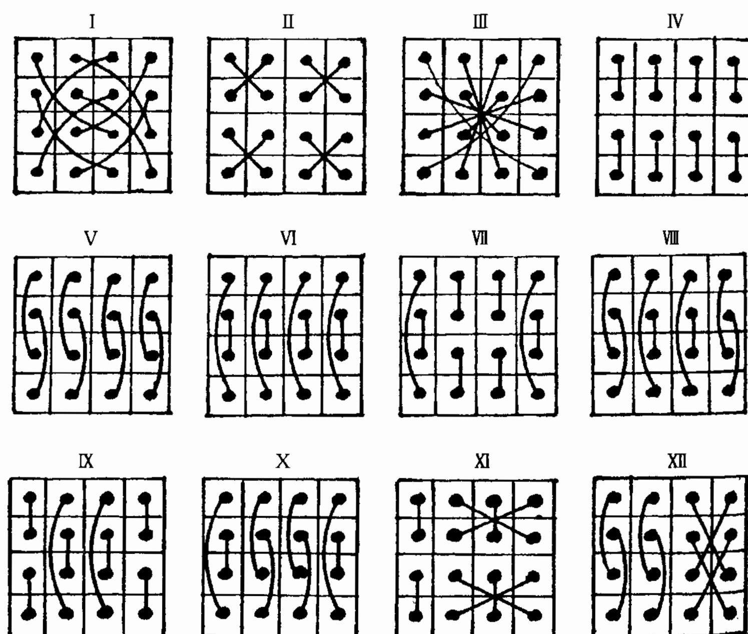


图 3-1　四阶幻方的 12 种子类型

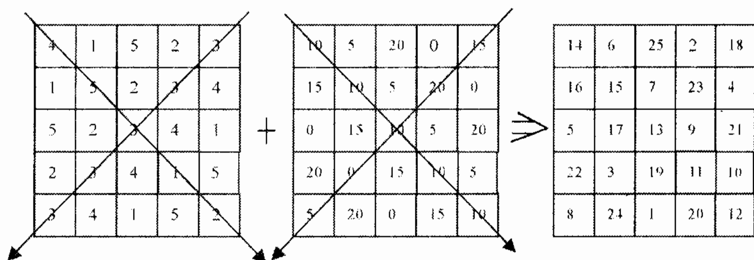
由此可见，4 阶的基本幻方有 880 个，通过旋转与反射，总共可有 7040 个幻方。

3.3 5 阶幻方的数量

由于 3 阶、4 阶幻方的数量没有经过太大困难就获得了，所以人们曾经期望 5 阶幻方的数量问题也能比较容易地解决。但事与愿违，在千百年的长时间内，无人能给出 5 阶幻方的确切数量。

当然，用某一种方法构造 5 阶幻方时，能生成多少种不同形式的幻

方是可以计算出来的。例如用拉伊尔法，我们在前面介绍了在基方中如何布基数，在根方中如何布根数。其实，这仅是用拉伊尔法获得幻方的一种可能的布法。用类似方法，但改变一下基数在基方中的布局，同时相应调整根数在根方中的布局，只要使基方中各行各列及对角线上数字之和维持为基方常数$\frac{1}{2}n(n+1)$，使根方中各行各列及对角线上数字之和维持为根方常数$\frac{1}{2}n^2(n-1)$，并使行、列上基数与根数的分布符合所述法则，则将基方和根方合并后均可获得幻方。例如，图 3-2 就是与图 2-14不同的、用拉伊尔法构造 5 阶幻方的另一种可能。



4	1	5	2	3
1	5	2	3	4
5	2	3	4	1
2	3	4	1	5
3	4	1	5	2

+

10	5	20	0	15
15	10	5	20	0
0	15	10	5	20
20	0	15	10	5
5	20	0	15	10

⇒

14	6	25	2	18
16	15	7	23	4
5	17	13	9	21
22	3	19	11	10
8	24	1	20	12

图 3-2　用拉伊尔法构造另一个 5 阶幻方

有人曾经计算过，仅仅用拉伊尔法，就可获得 57 600 种不同的 5 阶幻方。但拉伊尔法不是构造 5 阶幻方的唯一方法。还有连续摆数法、楼梯法、菱形法等不同的方法，每一种方法又可构造出许多不同形式的 5 阶幻方来。因此，5 阶幻方到底有多少，在很长时间内众说纷纭，但谁也说不出一个确切的数目来。有人曾经估计 5 阶幻方总数在 1 亿3 千万个以上，但许多人不相信。

这个问题最终是由计算机做出回答的。1973 年，理查德·许洛泼尔（Richard Schroeppel）开发了一个程序，在 PDP-10 计算机上运行了 100 个小时后得出结论，5 阶幻方的基本形式有275 305 224个，即 2 亿 7 千 5 百多万个，比早先的估计大一倍多！

对于 5 阶以上的幻方数量，至今未能有人做出确切的回答。计算机

发展到今天如此功能强大，但在回答这一问题上也还无能为力。对 6 阶幻方，皮恩（Pinn）和维茨考夫斯基（Wieczerkowski）利用蒙特卡洛模拟和统计学方法，也只能获得一个大概的估计数字，其数量在 $1.7743\times10^{19}\sim1.7766\times10^{19}$之间。我们后面介绍泛对角线幻方时，将介绍英国的奥伦肖和勃利在 20 世纪末解决了“最完美幻方”如何通过对“可逆方”的变换加以生成以及获得了 8 阶、12 阶、16 阶、32 阶这类幻方的精确数量，从而被《数学世界》誉为“标志着人类首次完成了对 5 阶以上一类幻方的彻底清理”，其原因就在这里（详见第 4 章第 2 节）。有一本数学书上给出了 7 阶幻方的精确数量 363 916 800，但未加任何说明，不知是否可靠。

4 “幻中之幻”

到这里为止，我们的讨论总的来讲是针对普通幻方进行的。所谓普通幻方或叫简单幻方（simple magic square）就是满足幻方的基本条件，即各行、各列、2 条主对角线上数字和相等的幻方。实际上还存在更加复杂的幻方。所谓“更加复杂”，是指除了满足幻方的上述基本条件之外，还有进一步的特点，更加神奇，可称之为“幻中之幻”。这样的幻方我们前面已经碰到一些，比如用菱形法构成的幻方，所有奇数集中在方阵中央，所有偶数分布在 4 角，这就够奇特的了。本章将专门介绍这样的一些幻方。

4.1 对称幻方

对称幻方（symmetrical magic square）也叫关联幻方（associative magic square），是指方阵中凡是对中心处于对称位置的 2 个元素之和全都相等，等于 (n^2+1) 的这样一种幻方。显然，要构成这样的幻方就更不容易了。我们前面介绍过的一些幻方就是对称幻方：洛书的 3 阶幻方，杨辉的 4 阶幻方（阴图、阳图），5 阶幻方（阴图），7 阶幻方（阴图），8 阶幻方（阴图），9 阶幻方；丢勒的 4 阶幻方。由于这种幻方的特殊构造，其对称性、匀称性更加突出，这在前面我们介绍这些幻方时已经仔细分析过了，不再赘述。

值得注意的是，单偶数阶幻方，即阶 $n=2(2m+1)$ 形式的幻方，如 6 阶，10 阶，是不可能构成对称幻方的。

4.2 泛对角线幻方

泛对角线幻方(pan-diagonal magic square 或 diabolical magic square)是不但2条主对角线上的数字和同各行、各列上的数字和都相等，而且在任意折对角线上的数字和也都相等的一类幻方。我们前面曾经提到，从西安出土的阿拉伯幻方，其中央的方阵经复原后成为一个标准4阶幻方，这个4阶幻方就是一个泛对角线幻方。在图1-27中，它的6条折对角线，即（8，12，9，5），（11，13，6，4），（1，13，16，4），（14，12，3，5），（10，11，7，6），（15，14，2，3），其数字和都是幻方常数34。这样的4阶泛对角线幻方是11～12世纪时的印度人卡俱拉霍（Khajuraho）发现的。由于他住在印度的西海岸距孟买约150公里处的纳西克（Nasik），所以西方又把这种幻方叫做Nasik幻方（但也有资料认为卡俱拉霍是一个地名）。

由于这种幻方在主对角线和所有折对角线上的数字和都相等，这就造成了它特有的一个性质，即把同样的这种幻方在平面上上下左右铺展开来的话，那么你可以随心所欲地在任意位置划定一个同样大的方阵，必定也是一个泛对角线幻方！或者说以这种方式，从一个（比如说4阶）泛对角线幻方出发，可以立即派生出15个不同的泛对角线幻方来！一般而言，对任意n阶泛对角线幻方，可以派生出的泛对角线幻方数量是（n^2-1）个。但能形成泛对角线幻方的最小可能的阶是4，因为3阶幻方的基本形态只有一个，是不满足泛对角线幻方条件的。同样地，所有单偶数阶幻方也不可能是泛对角线幻方。对于这个命题，普朗克（C. Planck）早在1919年就给出了证明。他的证明方法十分简单：在任意偶数阶$2m$的方阵中，以2×2的小方阵为单位，对4个不同位置的方格画上不同的花纹，如图4-1所示。现在假定在这个方阵中填入最前面的$(2m)^2$个自然数使之成为泛对角线幻方，则幻方常数$S=m(4m^2+1)$。再设所有画上剖面线的方格中的数的和为A，所有空白方格中的数的和为

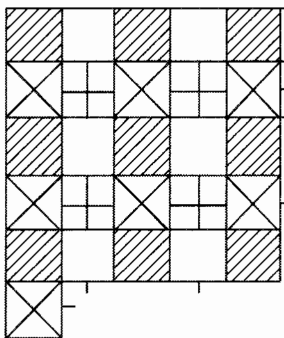


图 4-1　单偶数阶幻方不可能是泛对角线幻方的证明

B，所有打上叉的方格中的数的和为 C，则将 1、3、5、…所有奇数行中的数相加，可得 $A+B=mS$；类似地，将 1、3、5、…所有奇数列中的数相加，可得 $A+C=mS$；如果间隔着取对角线，将所有其中的数相加，可得 $B+C=mS$。由此三式可得 $A=B=C=\frac{1}{2}mS=2m^4+\frac{1}{2}m^2$。由于 A、B、C 必定都是正整数，可知 m 不可能是奇数，因为 m 若为奇数，$\frac{1}{2}m^2$ 这一项不可能是整数了。这就证明了单偶数阶幻方不可能是泛对角线幻方。普朗克承认，这样证明并不严格（no rigorous），但足够令人满意（quite satisfactory）。

普朗克的证明发表在芝加哥出版的一个刊物《The Monist》（一元论者）上。也许是由于这个刊物比较罕见（国内我们只查到北京大学图书馆有收藏），虽然讨论幻方的许多专著、文章中都提到普朗克已经解决了这个问题，我国几代学者仍致力于研究这个问题，并在 21 世纪初用与普朗克基本相同的方法解决了这个问题，相关的学术论文发表在某著名高校的学报上。笔者希望我们能从中吸取教训，在科学研究中充分重视信息的作用，充分掌握已有材料，避免重复做前人或外国人已经做过的工作。

由于泛对角线幻方具有这样一些特异的性能，人们又把它称为“完美幻方”（perfect magic square）。

在泛对角线幻方中，又有 2 类值得注意的特殊幻方。一类是它既是泛对角线幻方，又是对称幻方。研究证明，这样的幻方最少是 5 阶，图 4-2 就是一个 5 阶的又是

1	15	22	18	9
23	19	6	5	12
10	2	13	24	16
14	21	20	7	3
17	8	4	11	25

图 4-2　一个 5 阶泛对角线、对称幻方

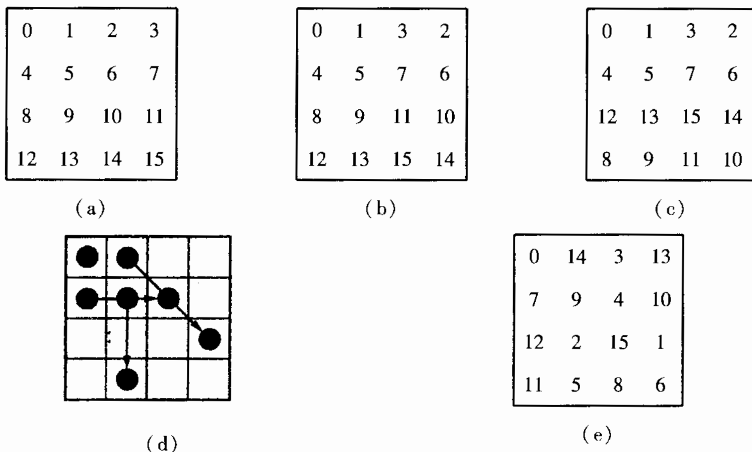
泛对角线的，又是对称的幻方。

另一类泛对角线幻方具有下列特征：在幻方任意位置上截取一个 2 ×2 的小方阵（包括跨边界的截取，即一半在幻方第 1 行或列，另一半在幻方末行或列），其中 4 数之和均相等，等于$2(n^2-1)$。而在对角线上，间距为$\frac{n}{2}$个元素的 2 个元素之和也都相等，等于（n^2-1），包括折对角线也如此。这样的泛对角线幻方被称为“最完美幻方”(most perfect magic square)。已经证明，最完美幻方的阶数一定是 4 的倍数。图 4-3 是一个 12 阶的完美幻方，其幻方常数为 858，任意 2 ×2 小方阵中 4 数之和为 286，任意对角线上间距为 6 个元素的 2 个元素之和均为 143。英国的 2 位业余数学爱好者凯瑟琳 · 奥伦肖（K. Ollerenshaw，这是一位年近九旬的老妪，长期从事大学管理工作）和戴维 · 勃利（David Brée，他是研究工商管理和心理学的）经过潜心研究，发现了通过“可逆方”(reversible square)构造最完美幻方的方法。所谓 n 阶的可逆方是由 0，1，2，…，n^2-1 构成的 1 个 $n\times n$ 方阵，如图 4-4（a）所示，它有 2 个特性：①逆转相似性（reverse similarity），即每行、每列的头一个数

64	92	81	94	48	77	67	63	50	61	83	78
31	99	14	97	47	114	28	128	45	130	12	113
24	132	41	134	8	117	27	103	10	101	43	118
23	107	6	105	39	122	20	136	37	138	4	121
16	140	33	142	0	125	19	111	2	109	35	126
75	55	58	53	91	70	72	84	89	86	56	69
76	80	93	82	60	65	79	51	62	49	95	66
115	15	98	13	131	30	112	44	129	46	96	29
116	40	133	42	100	25	119	11	102	9	135	26
123	7	106	5	139	22	120	36	137	38	104	21
124	32	141	34	108	17	127	3	110	1	143	18
71	59	54	57	87	74	68	88	85	90	52	73

图 4-3　一个 12 阶的最完美幻方（数从 0 起）

和末一个数，第 2 个数和倒数第 2 个数，第 3 个数和倒数第 3 个数……之和都相等；②方阵中任意位置、任意大小矩形两对顶角上元素之和相等，如图 4-4（a）中 $0+6=4+2$，$4+11=7+8$，…。可逆方一般不是幻方，但奥伦肖和勃利证明，任何双偶数阶的可逆方都可通过特定程序变换为最完美幻方。以 4 阶为例，他们设计的程序如下：首先把图 4-4（a）的可逆方中的 3、4 两列对调成如图 4-4（b）。其次把 3、4 两行对调成如图 4-4（c），画出方格线以后，如图 4-4（d）移动其中的 5 个元素：第 1 行第 2 个元素沿对角线方向移动 2 个单元；第 2 行第一个元素向右移动 2 个单元；第 2 行第 2 个元素向下移动 2 个单元，左下角元素向右移动 2 个单元；右下角元素往上移动 2 个单元（后 2 个移动图上没有表示出来）。哪个方格中有新元素移进来，原有元素则反向移至新元素原来所在方格。经过这样移动以后，可逆方就变成了最完美幻方，如图 4-4（e）。图中的最完美幻方包含数 0～15，而非 1～16，这丝毫也不影响它作为幻方的特性。



(a)

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

(b)

0	1	3	2
4	5	7	6
8	9	11	10
12	13	15	14

(c)

0	1	3	2
4	5	7	6
12	13	15	14
8	9	11	10

(d)

(e)

0	14	3	13
7	9	4	10
12	2	15	1
11	5	8	6

图 4-4　把 4 阶可逆方变成最完美幻方的过程

奥伦肖和勃利这一研究的意义不但为如何构造最完美幻方提出了切实可行的方案，还为解决 n 阶最完美幻方的数量有多少这一难题奠定了基础。因为从可逆方变换为最完美幻方是严格一一对应的，这样，要知

道 n 阶的最完美幻方有多少个，只要弄清 n 阶的可逆方有多少个就可以了，而后一问题的解决要容易和简单得多，因为：①可逆方可以分类，且每一类的大小是一样的，即每一类包含同样数量的可逆方；②每一类可逆方中有一个“主方”(principal square)，其他可逆方都是由这个主方通过各种变换获得的；③已知每一类中本质上不同的（即非同构的）可逆方的数量 Q 精确地等于下式

$$Q=2^{n-2}\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2$$

式中，! 是阶乘号。

由于在组合数学中对 n 阶可逆方有多少主方已有计算公式可以利用，这样，根据公式算出 n 阶可逆方的主方数量，再乘以上面给出的 Q，就可确切知道 n 阶可逆方的数量，从而也就知道 n 阶最完美幻方的数量。最终结果是

4 阶最完美幻方：48 个

8 阶最完美幻方：368 640 个

12 阶最完美幻方：2.22953×10^{10} 个

16 阶最完美幻方：9.322433×10^{14} 个

32 阶最完美幻方：6×10^{37} 个

奥伦肖和勃利的上述研究成果是在他们 1998 年出版的专著《最完美的泛对角线幻方：它们的构造方法及数量》（Most-perfect Pandiagonal Magic Squares: Their Construction and Enumeration，由位于伦敦以东的海港城市绍森德的数学及其应用研究所出版）一书中公布的，同时摘要发表在 1998 年 10 月的《Mathematics Today》杂志上。具有数学百科全书性质的《数学世界》（World of Mathematics, Gale Group, 2001）评论说：“他们的成果标志着人类首次完成了对 5 阶以上一类幻方的彻底清理。”

关于泛对角线幻方，我们最后要提到这样一件事：20 世纪 90 年代，从上海浦东陆家嘴的陆深墓中出土了一个玉挂，如图 4-5。它的正面用阿拉伯文字刻着“万物非主，唯有真宰，穆罕默德，为其使者”；

它的反面刻着一些古阿拉伯数字，翻译出来就是同图 1-27 一模一样的 1 个 4 阶泛对角线幻方。据史料记载，陆深在明嘉靖（1522～1567）年间曾当过大官，据说是三国东吴大都督陆逊的后裔。

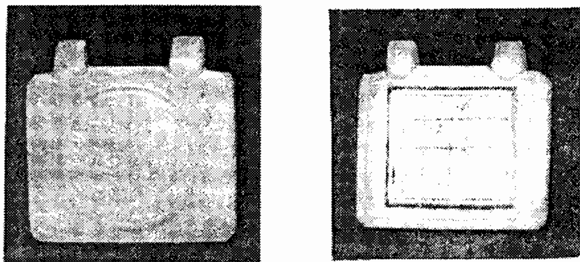


图 4-5 陆深墓中出土的玉挂

4.3 棋盘上的幻方

以上介绍的对称幻方和泛对角线幻方是相对于简单幻方而言的，也可以认为是幻方分类。下面再介绍一些别具特色的幻方。在 8×8 的国际象棋棋盘上用某一种棋子的棋步构成的幻方就是其中之一。

前面我们讨论幻方的构成方法时介绍过推广的连续摆数法。若普通向量取任意（±1，±2）组合或（±2，±1）组合，且不发生异常走步，那么形成的幻方实际上就是由马步构成的。当然这种方法只适用于奇数阶幻方，如 5 阶幻方。人们当然希望用马步构成 8 阶即棋盘上的幻方。多少年来有许多人曾致力于实现这一梦想，但至今没有成功。倒是用别的棋子的棋步构成了棋盘幻方，例如，意大利数学家海尔西 (I. Ghersi) 在 1921 年成功地用国王（king）的棋步构成了如图 4-6 的幻方。在这个幻方中，海尔西巧妙地利用了国王既可“横行”，又可“直走”，还可以“走斜线”的特点，构成了一个合格的幻方。

在只用马步无法构成棋盘幻方的情况下，人们尝试用马步加其他棋子的棋步共同来构成幻方。这一点，一个不知名的阿拉伯学者早在 11

世纪初就实现了。他用马步、皇后的棋步和象的棋步遍历棋盘方阵，构成了一个泛对角线的完美幻方，如图4-7。可以看出，其中前32步主要用马步，后32步交替使用马步和象步，皇后的棋步则主要用在方阵边界处，如4～5，8～9，应该说，近1000年前的人能造出这样的幻方，是很不简单的。

61	62	63	(64)	(1)	2	3	4
60	11	58	57	8	7	54	5
12	59	10	9	56	55	6	53
13	14	15	16	49	50	51	52
20	19	18	17	48	47	46	45
21	38	23	24	41	42	27	44
37	22	39	40	25	26	43	28
36	35	34	33	32	31	30	29

图4-6　由国王的棋步形成的幻方

32	39	60	3	30	37	58	1
59	4	31	40	57	2	29	38
5	62	33	26	7	64	35	28
34	25	6	61	36	27	8	63
24	47	52	11	22	45	50	9
51	12	23	48	49	10	21	46
13	54	41	18	15	56	43	20
42	17	14	53	44	19	16	55

图4-7　阿拉伯人在11世纪发明的混合棋步幻方

用马步虽然尚未构成完整的幻方，但一些学者已经做出的结果也是

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图4-8　Spriny的马步方阵构成“半幻方”

相当引人注目的。较好的结果一是斯泼里尼（J. E. Spriny）获得的，他用64个马步构成了一个半幻方，除对角线上数字和一为328，一为192，不符合幻方常数外，8行8列数字和均为260，符合幻方要求，见图4-8。值得注意的是：①斯泼里尼的这个半幻方，64个马步还构成一个哈密顿回路，即马从64可跳回起点1；②它的两条对角线上数字之和的一半也是260；③如把1～64分为1～32和33～64两半，则前32数与后32数在方阵中的位置正好是中心对称的（如1与33对称，2与34对称，…）；④每连续4数相连，或形成菱形，或形成斜置的正方形，极有规律。如1～4和5～8在第三象限中分别形成菱形与正方形，9～12和61～64在第二象限中形成正方形和菱形，如此等等。

另一个较好的结果是杜德尼获得的，见图4-9，这也是一个马步形成的哈密顿回路，每行、每列数字之和为260，但2条对角线上数字之和一为264，一为256，同幻方常数相差仅4。杜德尼认为他的结果是最逼近于幻方的马步方阵。

46	55	44	19	58	9	22	7
43	18	47	56	21	6	59	10
54	45	20	41	12	57	8	23
17	42	53	48	5	24	11	60
52	3	32	13	40	61	34	25
31	16	49	4	33	28	37	62
2	51	14	29	64	39	26	35
15	30	1	50	27	36	63	38

图4-9　杜德尼的马步“半幻方”

由于连续的64个马步无法构成幻方，人们就退而求其次。1905年，法国数学家赖利（A. Rilly）构成了如图4-10的一个马步方阵，在这个马步方阵中，马从1起走了32步以后，需另觅起点再走32步，正

好构成一个幻方。

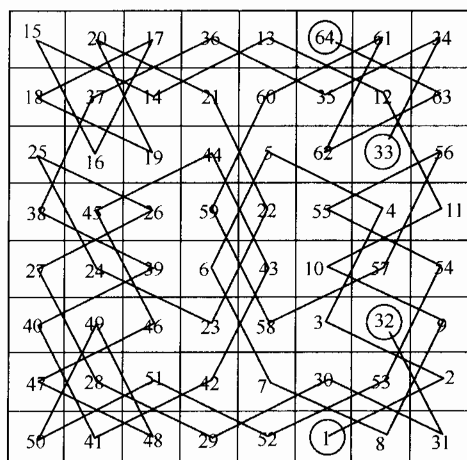


图 4-10　2 次起步构成幻方的马步方阵

18 世纪的法国大数学家欧拉也曾致力于马步棋盘幻方的开发。他获得的最好结果也是个半幻方，如图 4-11。除了对角线不符合幻方常数外，每行、每列 8 数之和都是 260。值得注意的是，它的 4 个 4×4 小方阵也都是半幻方，每行、每列 4 数之和都是 130。

真正棋盘大小的 8 阶马步幻方虽然无法构成，但在“超大型”棋盘上倒是构成了。图 4-12 就是用马步构成的 16×16 阶幻方。它不但是一个货真价实的幻方，即每行、每列、对角线上 16 数之和都是 2056，而且还是一个哈密顿回路，即马从 1 出发，遍历整个方阵以后，从第 256 个方格即最后一个方格，还能跳回第一个方格。此外，这个 16×16 的方阵明显可分为 4 个 8×8 的子方阵，马的跳步基本上在这几个子方阵中进行，每跳 16 或 32 步才转移到另一个子方阵中再跳，所以把跳步顺序连接起来的图案对水平和垂直两条中轴线都呈现出极大的对称性，这从图 4-12 可以明显地看出来。

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

图 4-11　欧拉开发的马步半幻方

184	217	170	75	188	219	172	77	228	37	86	21	230	39	88	25
169	74	185	218	171	76	189	220	85	20	229	38	87	24	231	40
216	183	68	167	222	187	78	173	36	227	22	83	42	237	26	89
73	168	215	186	67	174	221	190	19	84	35	238	23	90	41	232
182	213	166	69	178	223	176	79	226	33	82	31	236	43	92	27
165	72	179	214	175	66	191	224	81	18	239	34	91	30	233	44
212	181	70	163	210	177	80	161	48	225	32	95	46	235	28	93
71	164	211	180	65	162	209	192	17	96	47	240	29	94	45	234
202	13	126	61	208	15	128	49	160	241	130	97	148	243	132	103
125	60	203	14	127	64	193	16	129	112	145	242	131	102	149	244
12	201	62	123	2	207	50	113	256	159	98	143	246	147	104	133
59	124	11	204	63	114	1	194	111	144	255	146	101	134	245	150
200	9	122	55	206	3	116	51	158	253	142	99	154	247	136	105
121	58	205	10	115	54	195	4	141	110	155	254	135	100	151	248
8	199	56	119	6	197	52	117	252	157	108	139	250	153	106	137
57	120	7	198	53	118	5	196	109	140	251	156	107	138	249	152

图 4-12　16 阶马步完全幻方

4.4 亲子幻方

所谓亲子幻方（parent- child magic square）是一种嵌套幻方，即一个阶数较大的幻方里面包含着阶数较小的幻方。显然，我们前面讨论过的镶边幻方也可以看成是亲子幻方。但镶边幻方是从幻方构造方法的角度出发的，而亲子幻方是作为幻方中的一种特殊现象出发的。日本学者寺村（Shūtarō Teramura，1902～1980）在亲子幻方的研究方面最有成果，他24岁时就构造出了605个亲子幻方，都各具特色。下面介绍其中的两个，见图4-13。两个都是8阶幻方，幻方常数为260。（a）的中央包含一个4阶子幻方；（b）则在上半截的中央包含一个4阶子幻方，值得注意的是，两个双亲幻方和子女幻方都是泛对角线幻方，子女幻方的幻方常数都是双亲幻方常数的一半，即130。

2	29	51	48	1	30	52	47
56	43	5	26	55	44	6	25
15	20	62	33	16	19	61	34
57	38	12	23	58	37	11	24
4	31	49	46	3	32	50	45
54	41	7	28	53	42	8	27
13	18	64	35	14	17	63	36
59	40	10	21	60	39	9	22

（a）

2	29	51	48	1	30	52	47
56	43	5	26	55	44	6	25
13	18	64	35	14	17	63	36
59	40	10	21	60	39	9	22
4	31	49	46	3	32	50	45
54	41	7	28	53	42	8	27
15	20	62	33	16	19	61	34
57	38	12	23	58	37	11	24

（b）

图4-13 日本学者开发的2个亲子幻方

4.5 奇偶数分居的对称镶边幻方

我们前面曾介绍意大利人瓦卡和英国人康韦发明的一种将奇数全部集中在方阵中央而让偶数分布在四角的幻方构成法——菱形法。实际上，10世纪的阿拉伯数学家Alib AhmadAl-Antaki（？～987）就已经发明过类似的11阶幻方，见图4-14。这个幻方不但把全部奇数集中在方阵中央，让全部偶

数分布在四角，还有另外两个令人称奇的特点：①它还是一个非常对称的幻方。这个幻方以 1～121 的中数 61 居于方阵中央方格，其余 60 对和为 122 的 2 个数都分布在要么与中央方格相对称的位置上，要么以中间一行或中间一列为轴相对称的位置上。②这还是一个镶边幻方，其最内层是幻方常数为 183 的 3 阶幻方，然后以 122 的增量向外扩充为幻方常数为 305、427、549 和 671 的 5 阶、7 阶、9 阶、11 阶幻方，其构思十分精巧。

36	16	108	110	10	113	8	116	118	2	34
50	48	24	100	107	97	7	102	18	46	72
52	56	60	103	91	89	23	3	58	66	70
96	54	17	47	51	81	83	43	105	68	26
94	13	29	49	59	57	67	73	93	109	28
11	27	35	45	69	61	53	77	87	95	111
92	117	101	85	55	65	63	37	21	5	30
32	80	121	79	71	41	39	75	1	42	90
38	78	64	19	31	33	99	119	62	44	84
82	76	98	22	15	25	115	20	104	74	40
88	106	14	12	112	9	114	6	4	120	86

图 4-14　阿拉伯人 10 世纪发明的奇偶镶边幻方

4.6 T 形幻方

我们还要介绍一个奇特幻方，关于这个幻方有一个故事，是和我们中国人有关的。据杜德尼在他的 Amusements in Mathematics 中说，有一个西方绅士叫 Beauchamp Cholmondely Marjoribanks（下面我们简称 M 先生），对幻方很感兴趣，自以为在这方面很有知识并引以为自豪。一次他到远东地区来旅游，在中国，他遇到几个中国人，夸夸其谈地向他们介绍 5 阶幻方的构造方法，自以为他的高深知识会让这些中国人佩服。不

料，中国人静静地听完以后却说：“这太容易了，先生，你能不能构造出这样一个5阶幻方，在顶部9个有阴影、形成T字形的方格中只许放1、3、5、7、11、13、17、19、23这9个奇素数?”(图4-15)M先生一听傻了眼，琢磨了半天也构造不出这样一个奇特的幻方来。从此他知道自己的知识其实很有限，也知道再也不能小看中国人了。亲爱的读者，请你帮M先生解决这个难题吧！(答案见书末)。

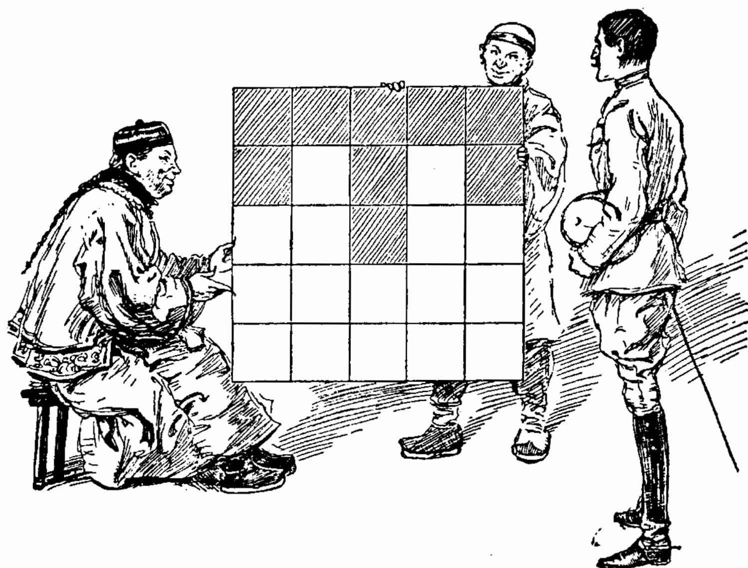


图4-15　西方绅士在中国遇到的幻方难题

5 非正规幻方

以上我们讨论的基本上都是正规幻方，也就是在 $n \times n$ 的方阵中放 $1 \sim n^2$ 个连续的自然数，各行、各列、2 条对角线上的数字相加，其和相等。当然，自然数是可以不从 1 开始的，因为很显然，由 1 开始的连续数所组成的幻方，如果对其中的每个数都加一个相同的整数，仍为幻方。如果幻方中的数不是连续的自然数，或者并非每行每列及对角线上数字之和相等，而是之差、之积、之商相等，那么，这样的幻方叫非正规幻方。我们前面已经见过这样的幻方了，例如图 4-14 所给出的阿拉伯人所发明的 11 阶幻方，其本身虽然是正规幻方，但其内层的 3 阶、5 阶、7 阶、9 阶幻方就都不是正规幻方。本节我们就来介绍一些与非正规幻方有关的一些问题。

5.1 普朗克幻方

前面已经证明，单偶阶的正规幻方不可能构成泛对角线幻方或对称幻方。如果要求生成单偶阶的泛对角线幻方或对称幻方，那就只能用非连续数了。普朗克（C. Planck）在 1919 年提出了一种用最接近于连续数的非连续数构成单偶的 n 阶对称幻方和泛对角线幻方的简便方法，只要在原先的 $1 \sim n^2$ 的基础上加进 n^2 之后的 3 个自然数就可以。当然，加进 3 个数之后，在原先的 $1 \sim n^2$ 中要相应减去 3 个数。减去哪 3 个数呢？1 个是中间的$\frac{1}{2}n^2+2$，另 2 个是任意的偶数，但它们的和必须等于 n^2+4，而最简单的办法是减去与$\frac{1}{4}n^2+1$成倍数关系的 2 个偶数。这样形成的单偶数阶对称幻方，各行、列、对角线上数字之和为$\frac{1}{2}n(n^2+$

4)，主对角线上对称元素之和为n^2+4。对于泛对角线幻方，折对角线上数字之和也是$\frac{1}{2}n(n^2+4)$。不但如此，这样的幻方还有一个性质，即每$(\frac{1}{2}n)^2$个方块中的数字之和都是$\frac{1}{8}n^2(n^2+4)$。

图 5-1 给出用这样的方法构成的 6 阶对称幻方和泛对角线幻方，幻方常数均为 120。其中在 1 ~ 36 之间抽走了 10、20、30 三个数，补进了 37、38、39 三个数。这个泛对角线幻方还有一个奇特的性质，即在其中任取 3 ×3 小方阵，其 9 数之和均为 180。

28	1	26	21	8	36
3	35	7	25	23	27
34	24	22	9	29	2
38	11	31	18	16	6
13	17	15	33	5	37
4	32	19	14	39	12

(a) 对称幻方

28	1	26	36	8	21
3	35	7	27	23	25
34	24	22	2	29	9
4	32	19	12	39	14
13	17	15	37	5	33
38	11	31	6	16	18

(b) 泛对角线幻方

图 5-1　普朗克幻方示例

5.2 合数幻方

若方阵全部由合数组成，没有一个素数，则这样的幻方叫合数幻方。显然，如果相邻两素数的间距大于 9，则任取其中的 9 个连续数必能组成 3 阶合数幻方；如相邻两素数的间距大于 16，则任取其间的 16 个连续数必能组成 4 阶合数幻方。……在素数表中，间距大于 9 的第一对素数是 113 和 127，因此在其中取 9 个连续数如114 ~ 122，就可构成如图 5-2 (a) 所示的 3 阶合数幻方。在素数表中，间距大于 16 的第一对素数是 523 和 541，因此在其中任取 16 个连续数如 524 ~ 539 就可构成如图 5-2 (b) 所示的 4 阶合数幻方。余类推。

121	114	119
116	118	120
117	122	115

(a)

527	532	528	539
537	530	534	525
538	529	533	526
524	535	531	536

(b)

图 5-2　3 阶和 4 阶的合数幻方

杜德尼提出了不用查素数表也可获得连续的 n^2 个合数以构成合数幻方的方法如下：首先写出连续数列 2，3，…，n^2，n^2+1。然后找出这些数的所有因子（不包括 1 及成倍数关系的因子，例如因子中有 2 和 4，则去掉 4）并把它们相乘获得积 p，再把 p 加到上述数列中的每个数上去，即可获得连续的 n^2 个合数 $2+p$，$3+p$，…，n^2+p，n^2+1+p 而可用来构成合数幻方。例如，对 $n=3$ 的情况，写出的原始数列是 2，3，…，10。这些数的因子有 2，3，5，7，其乘积为 210，因此可构成合数幻方的 9 个连续合数是212，213，…，220，它们实际上是素数表中间距大于 9 的第二对素数 211 和 223 之间的数。当然这个办法对于 n 较小的情况是实用的，当 n 较大时也就不太方便了。

5.3 乘幻方及其他

普通幻方是对加法而言的。18 世纪末有人发现了乘幻方，即行、列、对角线上数字相乘，其积相等。这样，幻方定义可扩充如下：

若 n 阶方阵任意直线（行、列、对角线）上各数字之值满足以下关系

$$N_n * (N_{n-1} * (N_{n-2} * (\cdots * (N_2 * N_1)\cdots) = \text{const}$$

则该方阵叫幻方，运算符号可分别取加、减、乘、除，相应幻方就叫加幻方（即普通幻方）、减幻方、乘幻方、除幻方。图 5-3给出了最简单的 3 阶的各类幻方。对于加幻方和乘幻方，由于结合律，运算次序是无关的，

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a) 加幻方

2	1	4
3	5	7
6	9	8

(b) 减幻方

12	1	18
9	6	4
2	36	3

(c) 乘幻方

3	1	2
9	6	4
18	36	12

(d) 除幻方

图 5-3　3 阶的加、减、乘、除各类幻方

所以易于理解。对于减幻方和除幻方，需要做些解释。图 5-3 中的减幻方，幻方常数为 $5=2-(3-6)=1-(5-9)=4-(7-8)=2-(1-4)=3-(5-7)=6-(9-8)=2-(5-8)=4-(5-6)$；对于除幻方，幻方常数为 $6=3\div(9\div18)=1\div(6\div36)=2\div(4\div12)=3\div(1\div2)=9\div(6\div4)=18\div(36\div12)=3\div(6\div12)=2\div(6\div18)$。由图 5-3 可见，减幻方可由加幻方两条对角线上的数字上下交换而获得，除幻方也可以用同样方法从乘幻方获得。减幻方的幻方常数乘以阶数（这里是 3）即为加幻方的幻方常数，而除幻方的幻方常数取 n 次方即乘幻方的幻方常数。这些规则对于较高阶的加、减、乘、除幻方也适用，当然，由加幻方生成减幻方和由乘幻方生成除幻方时需要交换的元素要更多一些。我们给出 5 阶的加、减，乘、除幻方的一组实例分别如图 5-4（a）～(d)，其中，减幻方和除幻方分别是从加幻方和乘幻方通过把两条对角线上下掉头，居中行、列的两头元素互相交换而形成的。加幻方的常数等于减幻方的常数乘阶数(5)；除幻方的常数取 5 次方等于乘幻方的常数。

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

(a) 加幻方

9	24	25	8	11
23	21	7	12	16
22	6	13	20	4
10	14	19	5	3
15	18	1	2	17

(b) 减幻方

54	648	1	12	144
324	16	6	72	27
8	3	36	432	162
48	18	216	81	4
9	108	1296	2	24

(c) 乘幻方

24	648	1296	12	9
324	81	6	18	27
162	3	36	432	8
48	72	216	16	4
144	108	1	2	54

(d) 除幻方

图 5-4　5 阶的加、减、乘、除幻方

乘幻方是怎样构成的呢？或者说有没有乘幻方的一般构造方法呢？对于奇数阶乘幻方，这样的构造法是存在的。首先，乘幻方中的数应该是如下矩阵中的数

$$\begin{matrix} a_0m^0 & a_0m^1 & a_0m^2 & a_0m^3\cdots \\ a_1m^0 & a_1m^1 & a_1m^2 & a_1m^3\cdots \\ a_2m^0 & a_2m^1 & a_2m^2 & a_2m^3\cdots \\ a_3m^0 & a_3m^1 & a_3m^2 & a_3m^3\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

选定 a_0、a_1、a_2、a_3、…和 m 的值以后，乘幻方中的数就全部确定了。然后就可以用类似于构造加幻方的连续摆数法把这些数分布到方阵中去，不同的是，在摆数时不是按数的大小顺序，而是首先摆上述矩阵中第一行的数，然后顺次摆第二行、第三行……的数。图 5-4 中的 5 阶乘幻方就是按这个方法构成的，其中 $a_0=1$，$a_1=3$，$a_2=9$，$a_3=27$，$a_4=81$（也就是说，a_0、a_1、a_2、a_3、a_4 也构成一个公比为 3 的等比级数），$m=2$。顺次摆放第一行、第二行……的过程见图 5-5(a) ~ 图 5-5(d)，最后如法炮制，把第五行的数放进去，就是图 5-4 中的 5 阶乘幻方了。显然，由于这样取数以及这样摆数，在每行、每列及两条对角线上的数，都包括 a_0、a_1、a_2、…以及 m^0、m^1、m^2、…这样一些因子，因

此其乘积必然是相等的。

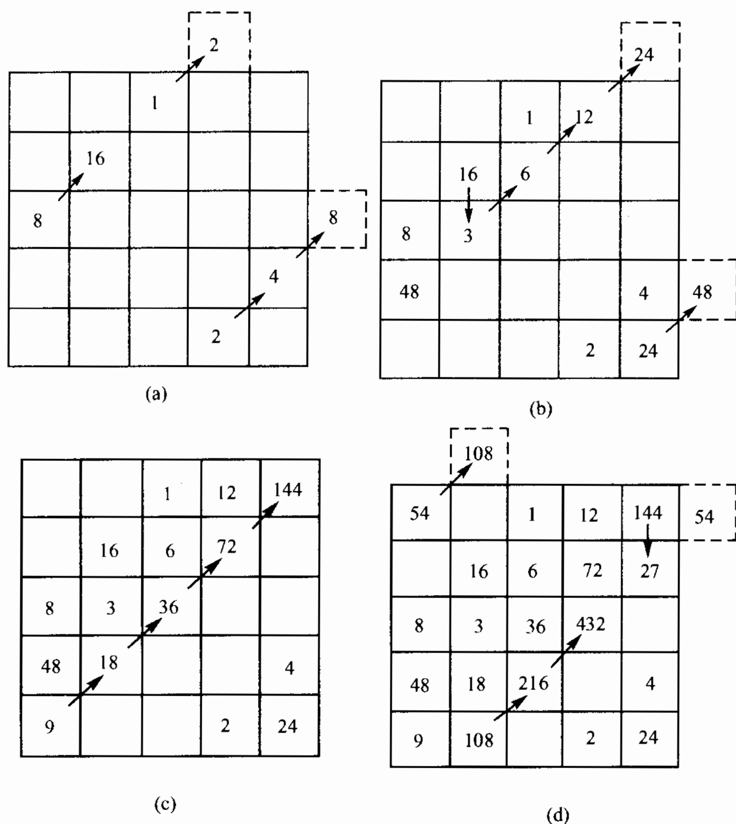


图 5-5　乘幻方的构造法

可以看出，用以上一般方法构成的乘幻方同时也是一个特殊的“欧拉方”或叫“正交拉丁方”。所谓正交拉丁方就是由 2 个拉丁方叠合在一起，且两者的任二符号组合仅出现一次的拉丁方。例如有以下 2 个拉丁方

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$$

则可形成正交拉丁方

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0,a & 1,b & 2,c \\ 1,c & 2,a & 0,b \\ 2,b & 0,c & 1,a \end{pmatrix}$$

之所以说乘幻方是一个特殊的正交拉丁方，是因为正交拉丁方只要求每行、每列中有不同元素，而乘幻方则还要求两条对角线上也都有不同元素，条件更加苛刻。由此可见，上述乘幻方的构造方法实际上也为奇数阶正交拉丁方的存在性提供了一种证明。

6 幻方的变形

既然方阵中数字的特定排列可以形成幻方，变化万千，趣味无穷，那么，在其他形式的几何阵列中自然也可以通过对数字的特定排列而形成与幻方有类似性质的有趣图案，这就是幻方的变形。变形幻方最早产生于什么年代已不可考，但在杨辉的《续古摘奇算法》中，在给出一系列幻方的同时，也就给出了许多有趣的变形幻方，可见它至少也有好几百年的历史了。这一章我们就从介绍杨辉的变形幻方开始。

6.1 杨辉的幻圆

杨辉在《续古摘奇算法》中，共给出了6个变形幻方，基本上都是将数字分布在圆周上形成的，所以可统称为幻圆。我们逐一加以介绍。

1. 攒9图

杨辉的这个幻圆（图6-1）是将自然数1～33分布在4个同心圆与4条直径的交点上，而将9置于中心，攒9图的名称由此而来。在攒9图中，4条直径上9个数的和都等于147，8条半径上4数之和都等于69（图6-1）。由吴文俊院士主编的《中国数学史大系》对杨辉的攒9图给予了极高评价，认为它是“史无前例的”。实际上，攒9图还有一个奇异性质：它的垂直直径的上半截与它右侧3条半径上的16个数正好组成一个半幻方；而垂直直径下半截与它左侧3条半径上的16个数也正好组成一个半幻方，即每行、每列4数之和都是69，但对角线一为70，一为68。

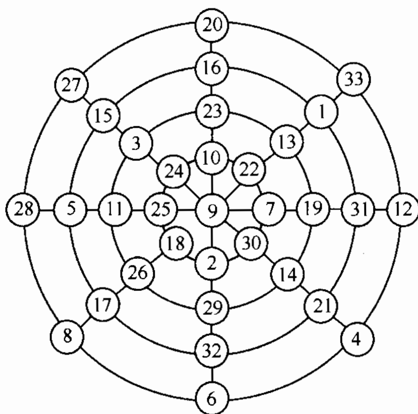


图 6-1　攒 9 图

2. 聚 5 图

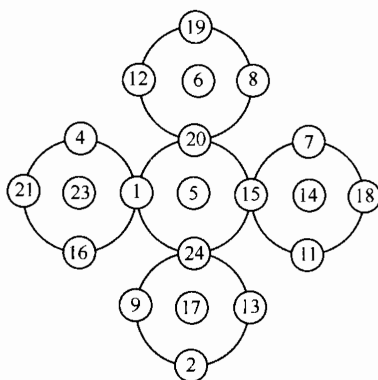


图 6-2　聚 5 图

杨辉自称在聚 5 图（图6-2）中“21 子作25 子用”，因为周边4 个圆各有 1 子与中央圆共有。每个圆的圆周上 4 数与中心数之和均为 65。所用数字也是从 1 开始的。实际上，除了图上画出的 5 圆 5 数有幻和 65 之外，还有 2 个没有画出的“虚圆”具有这个性质，即经过外围 4 个圆

的圆心和最外侧 4 个小圆的圆，连同中央的 5，5 数之和也都是 65，即（6，14，17，23，5）和（19，18，2，21，5）。

3. 聚 6 图

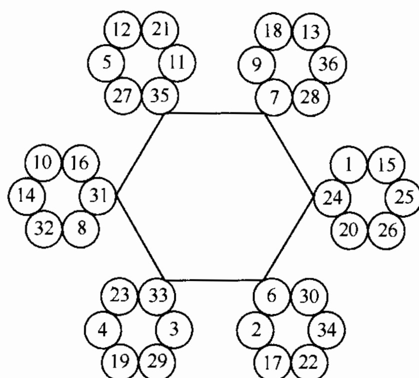


图 6-3　聚 6 图

聚 6 图（图 6-3）在正六边形的 6 个顶点处各有 6 个小圆围成一圈，内中 6 数之和均为 111，杨辉谓之“六子回环，各一百一十一”。但新

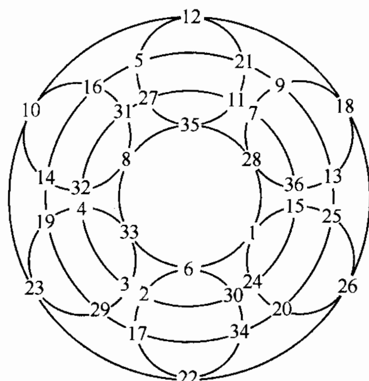


图 6-4　改正以后的聚 6 图效果

加坡学者蓝丽蓉（Lam Lay Yong，她是著名华侨领袖陈嘉庚先生的外孙女，原名温丽蓉，因丈夫姓蓝，改名蓝丽蓉）认为，这个聚 6 图在传抄、复刻过程中发生了错误，与六边形左右顶角相接的小圆不应是 31 与 24，而应该是 8 与 1，与右上顶角相接的也不应是 7 而应是 28，此外，左下角左侧 3 个小圆位置也有误，从上到下应分别为 4、19、23，这样改正以后的聚 6 图，就不单有 6 组 6 数之和为幻和 111 了。内层和外层 6 数之和也是 111，而中间 2 层各 12 个数之和则是幻和 111 之倍，即 222，如图 6-4。按照杨辉的数学功底，聚 6 图理应有如此丰富的内涵，所以我们认为蓝丽蓉的意见是有道理的。

4. 聚 8 图

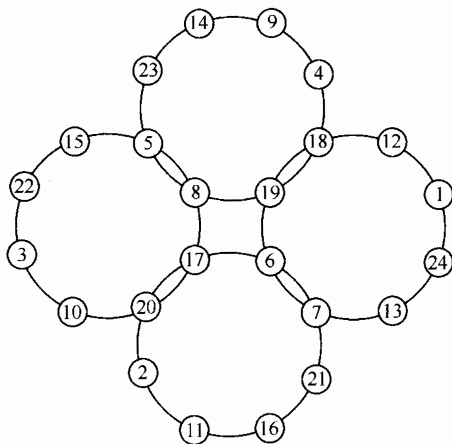


图 6-5　聚 8 图

杨辉谓聚 8 图（图 6-5）为“24 子，作 32 子用”，因为每个圆的圆周上的 8 个数中各有 2 数分别与另外 2 个圆共用。同一圆上的 8 数之和均为 100。此外，两两相交的 8 数之和，不相交的数中 4 个圆上最外侧的 8 数和内侧的 8 数之和，也都等于 100，如图6-6。而具有等和的 4 元素组就更多了，如：每个圆的上下半圆上的 4 元素；左右半圆上的 4 元

素；中间2个圆作平行于水平直径的4条水平线，每条直线上的4个数；上下2圆作平行于垂直直径的4条垂直线，每条直线上的4个数；最中心4数及其周围4数；每个圆的上下4数和左右4数。之所以具有如此多的幻和和半幻和组，在于其数的分布极有规律：对水平中轴线对称的任2数之和都是25，如(8，17)，(9，16)；对图形中心对称的任2数必是相邻奇数或相邻偶数，如(1,3)，(18，20)。

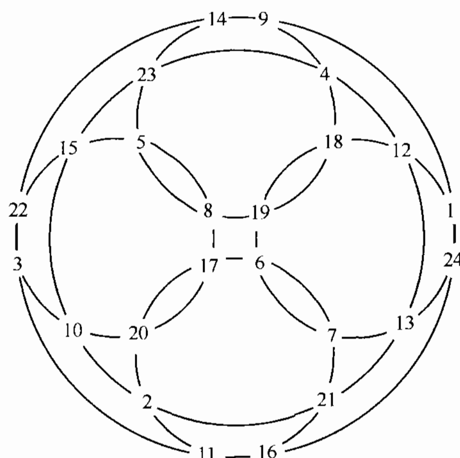


图6-6　聚8图之展开

5. 八阵图

八阵图（图6-7）原是中国古代兵法中的一种布阵方法，杨辉谓他的八阵图“八八六十四子，总积二千八十。以八子为一队，纵横二百六十。以大辅小，而无强弱不齐之数，示均而无偏也。”阵中共8环，每环8数和均为260，上下4数和左右4数之和均为130。可以看出，八阵图中1~64的32对互补的数对即（1，64)，(2，63)等正好均匀地分布在8个环中，每环4对，而八阵图正中的8数正好是由（1，64)，(3，62)，(5，60)，(7，58）4个互补数对组成，因此其和也为260。如果把八阵图和杨辉的易数图即8阶幻方的阴图相比较，我们就可看

出，八阵图的一个环正好对应于易数图中的 2 ×4 一个区域。

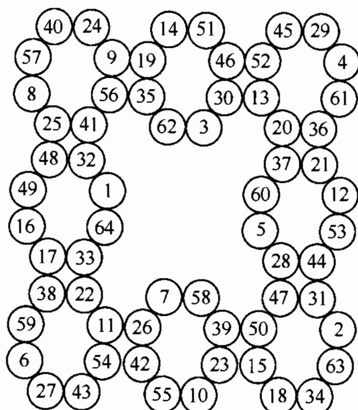


图 6-7　八阵图

6. 连环图

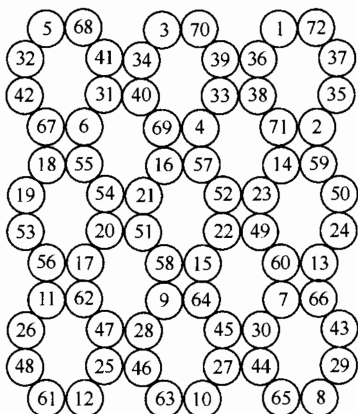


图 6-8　连环图

连环图（图 6-8）是把八阵图中央的空白也用一个环补上而形成的，所以是九连环，但由于环环相扣，因此形成13个圆环，故杨辉曰

“七十二子，总积二千六百二十八，以八子为一队，纵横各二百九十二，多寡相资，邻壁相坚，化一十三队，此见运用之道。”连环图中每环上、下和左、右4元素之和以及相邻2环紧靠在一起的4元素之和均为146，8数和为292。至于连环图的构成方法，以蓝丽蓉的下述分析最为简单直观：把1～72顺序交叉排列成4列如表6-1。然后横向分成9组，每组即对应于一个环。

表 6-1

72	37	36	1	62	47	26	11
71	38	35	2	61	48	25	12
70	39	34	3	60	49	24	13
69	40	33	4	59	50	23	14
68	41	32	5	58	51	22	15
67	42	31	6	57	52	21	16
66	43	30	7	56	53	20	17
65	44	29	8	55	54	19	18
64	45	28	9				
63	46	27	10				

6.2 对杨辉变形幻方的发展

杨辉以后，我国历代数学家中有不少人致力于对幻方和变形幻方的研究，取得了许多新的成果，其中比较著名的有宋的丁易东，明的王文素，清的张潮和保其寿等人。本节我们介绍一下他们所开发的一些构思精巧的变形幻方。

稍晚于杨辉的宋人丁易东著有 3 卷《大衍索隐》。明人王文素著有《新集通证古今算学宝鉴》6 册，刊印于 1524 年。清朝的张潮生于 1650 年，卒年不详，著有《心斋杂俎》2 卷。我们前面提到，杨辉的百子图仅行、列方向满足幻方常数，对角线方向不满足，这个缺陷正是张潮发现的，他并且作“更定百子图”，给出了一个正确的 10 阶幻方。前面还提到，杨辉的聚 6 图在传抄过程中发生错误，张潮也发现了，并因此

也作了“更定聚 6 图”。保其寿是江苏南通人，著有《碧奈山房集》。下面所介绍的变形幻方均出自以上数人的上述著作。

1. “洛书 49 位得太衍 50 数图”

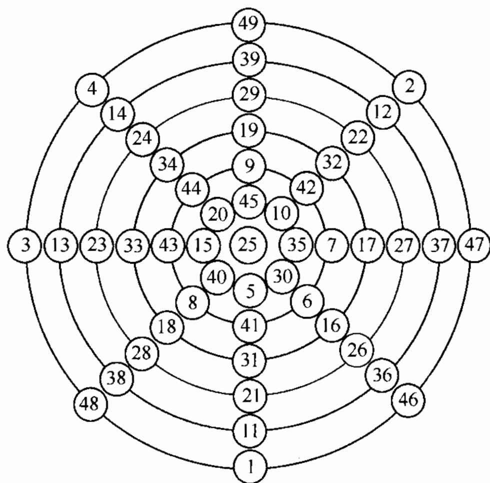


图 6-9　太衍 50 数图

丁易东的这个幻圆（图 6-9）是对杨辉攒 9 图的发展。同心圆由 4 个扩大至 6 个，因此元素也由 33 个增加到 49 个，中数 25 居中心。数的分布严格按照洛书 3 阶幻方的规则“二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一”：尾数为 4 和 2 的分居上半圆的左右，尾数为 8 和 6 的分居下半圆的左右，尾数为 3 和 7 的分居左右半径，尾数为 9 和 1 的分居上下半径，且尾数为 1、2、3、4 的按从小到大的次序由外层至内层，尾数为 6、7、8、9 的则按相反次序顺序填入，余下的 8 个 5 的倍数则以 25 为中心，填入最内层，而且如果是5的 n 倍，则填入尾数为 n 的数所在的列，例如 15 是 5 的 3 倍，所以 15 与 3，13，23，33，43 处于同一列。这样，这个幻圆所有同心圆上 8 元素之和均为 200，加上中心数为 225，每条直径上 9 数之和为 325，所有对中心对称的 2 数之和均为

50。因此丁易东自谓此图“以洛书之法，纵横等布”而成，“其位虽四十有九，而对位之数合成五十，周围各二百”，与古语云“大衍之数五十，其用四十有九”暗合，不可谓不巧妙。

2. 九宫八卦图

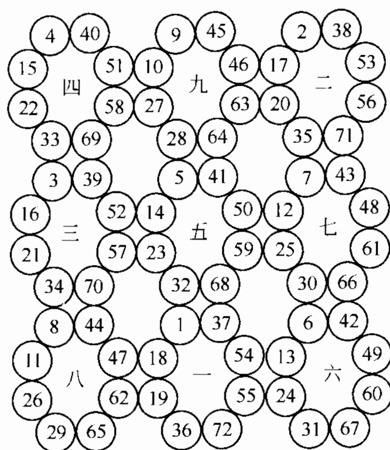


图 6-10　九宫八卦图

丁易东还构造了九宫八卦图（图 6-10）。这个图与杨辉的连环图相似，也是九连环，形成 13 个圆环，每环 8 数和都是 292。它的奇特之处是与洛书图相呼应：其 1 ~ 9 所处位置正好形成洛书 3 阶幻方，处于每宫的上行左；10 ~ 18 则按逆序从九宫开始分别填入每宫的左行上；19 ~ 27 又从一宫开始顺序分别填入每宫的左行下；按以上规律填满72个数而形成此图。这是很别出心裁的。

3. 花王字图

这是王文素的创作（图 6-11）。17 个环环相扣的圆形成一个“王字”，每个圆中包括 8 个数，和均为 420。值得注意的是，所有圆中上下相对、左右相对的 4 组 2 数之和均为 105，分布极其均匀。

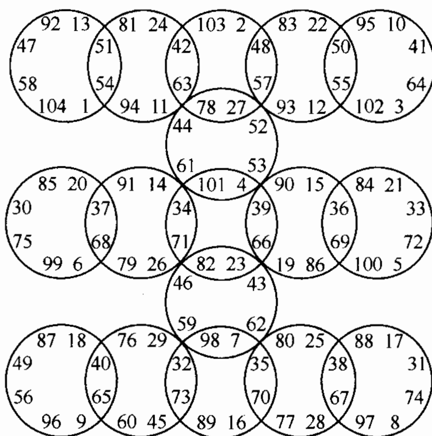


图 6-11　花王字图

4. 古珞钱图

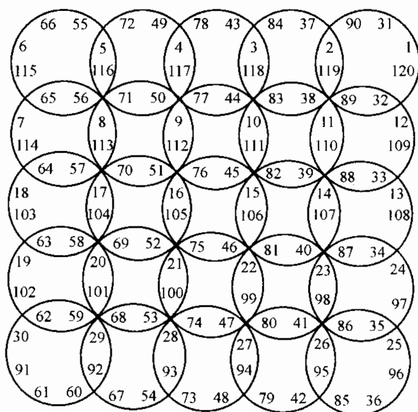


图 6-12　古珞钱图

这也是王文素发明的（图 6-12）。$5\times5=25$ 个相互交叠的圆形成古珞钱的形状，每个圆中 8 个数之和均为 484。同花王字图一样，所有圆

中上下相对、左右相对的 4 组 2 数之和均为 121，共计 60 对。

古珞钱图中数的分布极有规律：数 1 ~ 30 从右上角的圆出发，按水平方向循环往返分布在各圆的右上和左上位置；31 ~ 60 仍从右上角的圆出发，但按垂直方向顺序从小到大分布在各圆的上右和下右位置；61 ~ 90则从左下角的圆出发，但以垂直方向循环往返分布在各圆下左和上左位置；最后 91 ~ 120 也从左下角圆出发，但以水平方向循环往返分布在各圆左下和右下位置，即成古珞钱图。

5. 连环之图

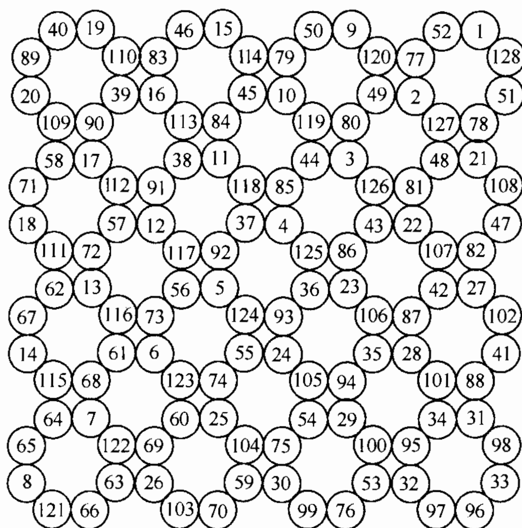


图 6-13　连环之图

王文素的这个连环图（图 6-13）比丁易东的 9 连环高一阶，是 4 × 4 = 16 环，但因为环环相扣，实际形成 25 个环，每环中 8 数之和均为 516，其中上下相对 4 个数之和同左右相对 4 个数之和又均为 258。

这个图中数的分布也是很有规律的，但它与古珞钱图不同，不是水平或垂直走向的，而是按对角线方向走的，读者在右上角找到 1 以后，

不难发现其分布规律。

6. 璎珞图

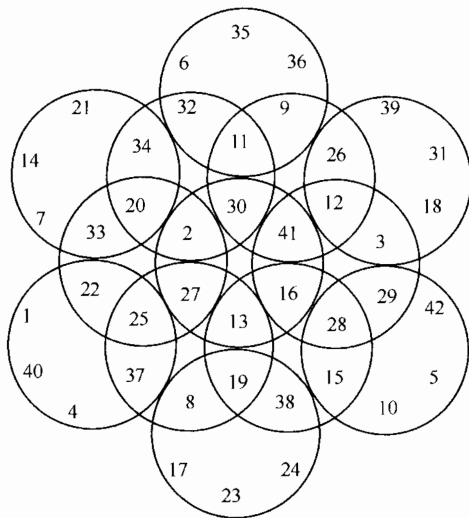


图 6-14　璎珞图

王文素设计的这个璎珞图（图 6-14）由 6 个相切的外层圆，6 个相交的内层圆及 1 个中心圆共 13 个圆组成，每个圆中 6 数之和均为 129。

7. 揲四图

张潮推出的变形幻方从比较简单的叁三图到比较复杂的九宫图有 23 幅之多。我们只介绍其中设计得最为精巧的几幅。揲四图（图 6-15）是其中之一。

揲四图中有 5 个圆，每个圆上有 4 个数，和均为 34。但由于其巧妙安排，水平与垂直 2 条中轴线上 4 数以及右斜与左斜的8条平行线上的4数之和也均为34，外围4个圆最外侧的4个数之和也是34。因此，张潮自豪地宣称，揲四图“16 子作 64 子用，角径平径四方四尖中心俱 34 数”。

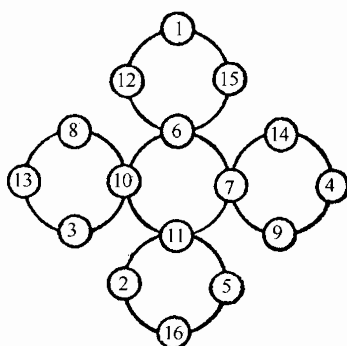


图 6-15 揲四图

8. 六合图

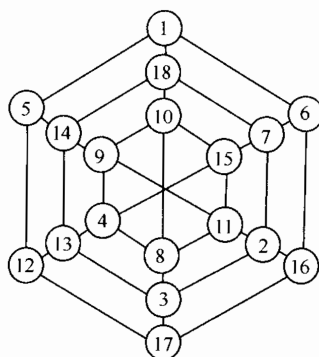


图 6-16 六合图

六合图（图 6-16）中只有 18 个数，分布在同心的 3 个六边形的各顶点，但共有 12 组 6 数和为 57：3 条对角线，3 个六边形的顶点，由任意 2 条相邻对角线所围成的 6 个梯形周边。因此张潮称六合图“18 子作 72 子用，围径并每方各 57 数”。

9. 八阵图

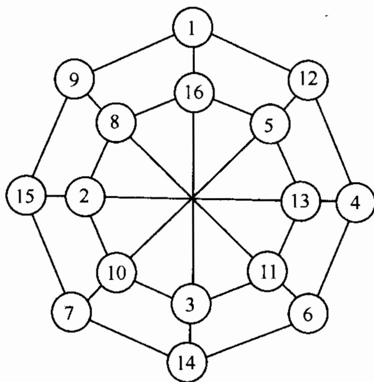


图 6-17　八阵图

在笔者见到的八阵图中，张潮的这个八阵图（图 6-17）是用子最少的，只有 16 个数，但构成 4 数和为 34 的组数多达 36 组：4 条对角线，任意 2 条半径（不一定相邻）组成的梯形（24 个，如 1，16，9，8；12，5，6，11；…），内层和外层对顶角顶端 4 数（8 组，有些呈正方形，如 8，5，11，10；有些呈长方形，如 1，12，7，14）。其原因很简单：同一半径上 2 数之和均为 17。所以张潮谓此八阵图"每方及径每 4 子各 34 数，16 子作 144 子用"。除此之外，我们还看到，这个八阵图的外围及内围 8 数之和均为 68；任意将图一分为二，每半图的 8 数之和也均为 68；任意 2 条直径形成一大一小套在一起的 2 个矩形顶上的 8 数之和也均为 68，因此 8 数之和为 68 的组数也多达 18 组。

10. 浑圆图

保其寿与张潮同为清人，但似在张潮之后，因为他在《碧奈山房集》的自序中说他看过张潮的《心斋杂俎》，并指出张潮的幻方与变形幻方"所演皆平图，不知立方与浑圆尤为可喜，其源虽权与洛书，其巧实不可思议，当是天地间合有此一种理数"。因此保其寿的变形幻方别

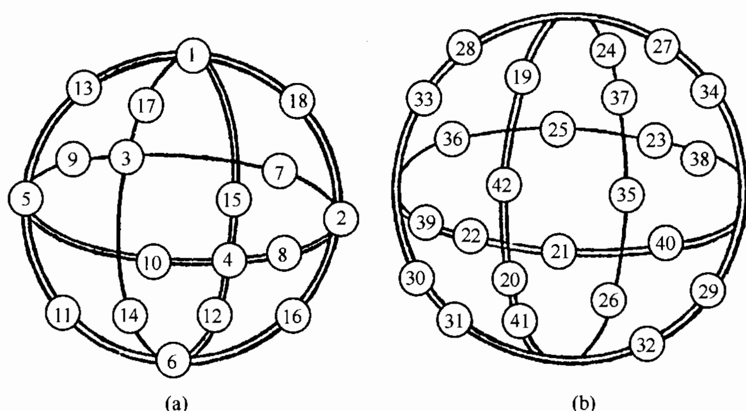


图 6-18　浑圆图

具一格，向立体方向发展，如“六合立方”，“浑三角”，“六合浑圆”等等，图 6-18 中的 2 个圆，保其寿未命名，我们暂把它们叫做浑圆图，我们先看图6-18(a)。球面的 3 个正截面上均匀地分布从 1 到 18 这些数，有 6 个数是两两相交的，也就是 2 个圆共有的。这 3 个截面把球面等分成 8 块，每块球面边界上的 6 数之和都是 48，保其寿云“面各 48 数，18 子作 48 子用”即此意。保其寿还指出此图的另一特异性质：“如以 1 换 18，2 换 17，逐子相易，即成每面 66 数”。

图 6-18(b)的浑圆图如果独立地看，是将 19 ~ 42 共 24 个数以互补数字对的方式分布在截圆的圆周上，每对的和是 61，因此，每面 6 数之和都是 183。但因为这些数字的分布是“每梁加 2 子”，且数是接续于前面的(a)图的，因此可以将(a)图与(b)图合并起来，形成一个截圆圆周上有 16 个数的浑圆，这时每面 12 数之和为 231。对于变局（即 1 换 18，2 换 17，各子互换以后的(a)；(b)图中每梁上 2 个数本来都是互补的，互换以后作用当然不变），每面上数字和为 249（但不知什么原因，保其寿书上云“每梁加 2 子，加入前图，面各 109 数，加入变局 127 数，”只增加了一个梁上的 2 数之和）。

11. 六道浑天图

保其寿设计了 3 个六道浑天图，都十分精巧。如图 6-19，是把球形的浑天仪，类似于把地球仪剖分成东西两半球展开成地图那样，剖分成南北两半球并展开以后的形状。可以看出，浑天图由 6 条纸带相互缠绕而成：有 2 条各围成 1 个圆形，有 2 条穿过上下 2 个圆并交织成“8”字，另 2 条各在上下圆中并同圆和“8”字形 2 条纸带相交织。纸条上分布着从 1 到 90 的数。这些相互缠绕的纸条共形成 12 个五边形和 20 个三角形，每个五边形周边共有 10 数，其和均为 380；每个三角形周边共有 6 个数，其和均为 228，因此保其寿云“90 子作 240 子用”，不可谓不巧妙。

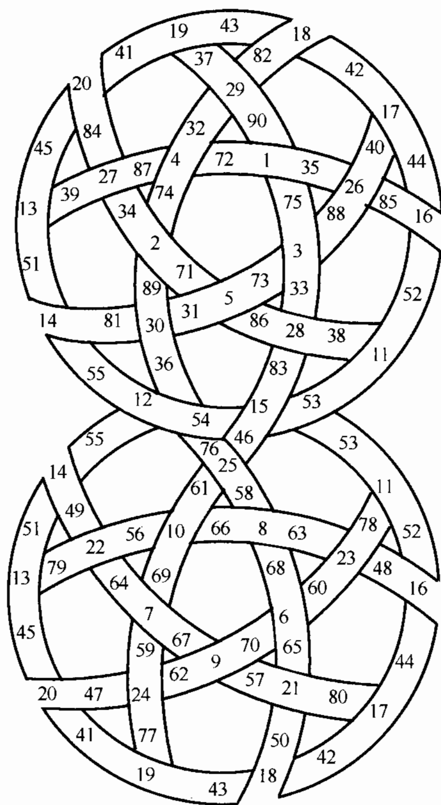
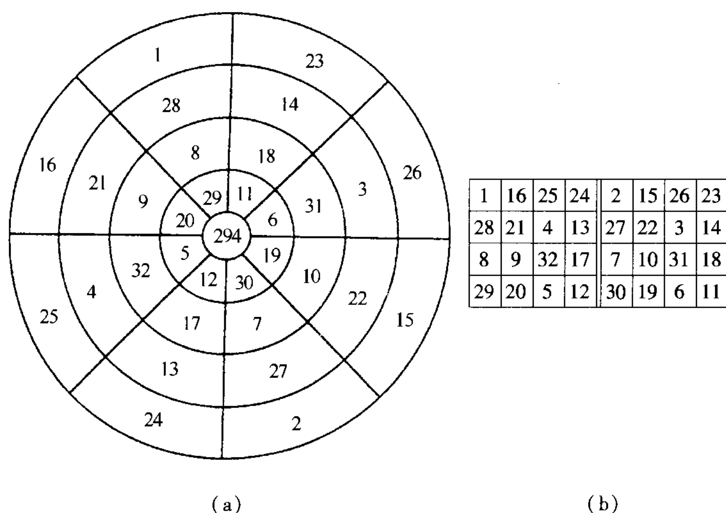


图 6-19　六道浑天图

6.3 中世纪印度的幻圆和魔莲花宝座

幻方从中国传入印度以后，印度数学家在幻方和变形幻方的开发方面也极富创造力。这里介绍纳拉亚纳（Narayana）的一个幻圆和一个魔莲花宝座。

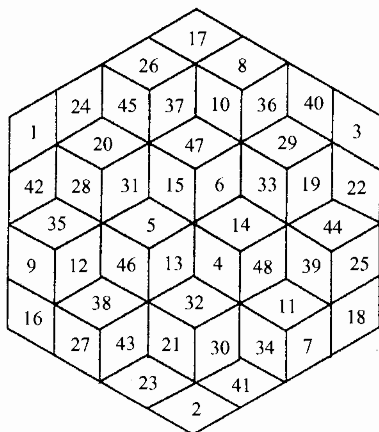
纳拉亚纳设计的幻圆如图 6-20(a)。它从内到外共有 5 个同心圆,4 条直径把这些圆 45°等分为 8 个扇形区和 4 个圆环,共 32 个环形区域,每个区域中放 1 ~ 32 中的一个数,中心放 294。这样,每个扇区和上、下每个半环中的 4 数之和都是 66,加上中央的 294 正好等于圆周度数 360。这个幻圆的对称性也设计得非常好,1、2,3、4,…,31、32 这样的连续数对所处位置都是中心对称的。而如果把这个幻圆沿上面的垂直半径剪开后展开的话,可以看出,它形成 2 个 4 阶的泛对角线幻方,如图 6-20(b)。这一点上，纳拉亚纳的幻圆比杨辉的攒 9 图高明一些（杨辉的攒 9 图形成 2 个半幻方）；当然，这和杨辉用连续数 1 ~ 33，而纳拉亚纳用 1 ~ 32 加不连续的 294 有关。



1	16	25	24	2	15	26	23
28	21	4	13	27	22	3	14
8	9	32	17	7	10	31	18
29	20	5	12	30	19	6	11

图 6-20　纳拉亚纳的幻圆

纳拉亚讷设计的魔莲花宝座在变形幻方中堪称一绝。这个六边形的莲花宝座如图6-21(a)，共有48个菱形，填入1~48。这48个菱形中有1/3是面朝上的，1/3是面朝东的，1/3是面朝西的，它们组成一个个小立方体的3面，使整个莲花宝座看起来很有立体感。整个莲花宝座由16个花瓣的一朵莲花组成，但从上往下看，从东往西看，从西往东看，花瓣上的数字是不同的，3个方向各形成由16个小菱形组成的大菱形。如果把这3个大菱形挤压和旋转一下把它们变成4×4的方阵，我们就可以看到，这是3个常数为98的泛对角线幻方，如图6-21（b)、(c)、(d)，你说奇妙不奇妙?



(a)

17	8	29	44
26	47	14	11
20	5	32	41
35	38	23	2

(b)

36	19	25	18
37	6	48	7
24	31	13	30
1	42	12	43

(c)

45	10	40	3
28	15	33	22
9	46	4	39
16	27	21	34

(d)

图6-21　魔莲花宝座

关于这个莲花宝座的资料，请参阅《非西方文化的科学、技术与医学史百科全书》(Encyclopedia of the History of Science, Technology, and

Medicine in Non-Western Cultures, Kluwer Academic Publishers, 1997)。但笔者对它的分析与该书有所不同。该书认为这朵莲花是由 6 个花瓣组成的，但未指明如何划分 6 个花瓣。由于印度是佛教盛行的国家，笔者认为把它看做立体的莲花宝座更为恰当；从 3 个不同方向看，该莲花都是由 16 个花瓣所组成，也更符合莲花的实际情况。

6.4 富兰克林的八轮幻圆

作为政治家、外交家，又是科学家、发明家的富兰克林，是个十足的“幻方迷”。他除了设计出许多精巧的高阶幻方外，还设计出了一个十分复杂而巧妙的幻圆，他自己称之为“圆的幻圆”（the magic circle of circles），我国台湾学者称之为“八轮幻圆”，如图 6-22。图中既有许多同心圆，又有许多偏心圆，看上去显得眼花瞭乱。我们先不去管那些偏心圆，看一下除中心的 12 外，其他从 12 到 75 这 64 个数在被 9 个同心圆和 4 条 8 等分整个圆的直径所围成的 64 个环形区域中的分布，就可以发现它们有多种对称性：

（1）在两条垂直半径 A 和 C 两侧的 2 个相邻扇区以及 2 条水平半径 B 和 D 上侧和下侧的 2 个相对扇区中，2 个环内的 2 数之和均为 87；

（2）如果我们从中心出发往外数，把由内到外的环分别叫做 1 环，2 环，3 环，…，8 环，那么我们看到，第一象限两个扇形的单数环中 2 数之和均为 135，偶数环中 2 数之和均为 39；第二象限两扇形则正好与之相反，偶数环中 2 数之和均为135，奇数环中2数之和均为39；

（3）第三象限与第四象限的情况与之类似，但第三象限 2 扇区单数环中 2 数之和均为 71，偶数环中 2 数之和均为 103，第四象限是偶数环中 2 数之和均为 71，奇数环中 2 数之和均为 103；

（4）类似地，半径 B 两侧相邻 2 个扇区中，单数环 2 数之和均为 119，偶数环中 2 数之和均为 55；而半径 D 两侧相邻 2 个扇区则刚好相反，偶数环 2 数之和均为 119，单数环中 2 数之和均为 55。

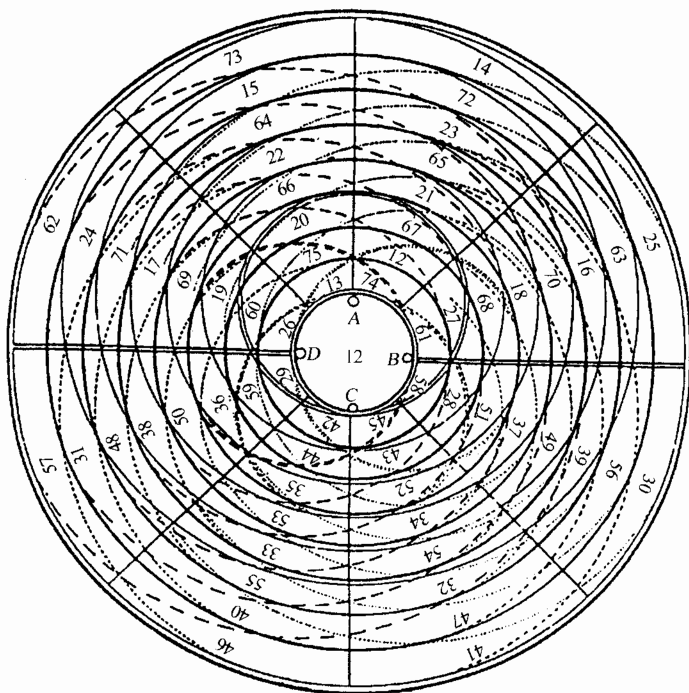


图 6-22　富兰克林的 8 轮幻圆

由于数字分布有以上各种对称性，八轮幻圆呈现出以下奇特性质：

（1）任意相邻两同心圆所围成的环内 8 数之和均等于 348，加上中央之 12，恰为 360，是圆周度数。

（2）每个扇区内 8 数之和加中央之 12，也等于圆周度数 360。

（3）若将八轮幻圆以水平中轴线将之分为上下两半，则任意相邻同心半圆所围成的半环内 4 数之和均为 174，加上中央数 12 之半，恰为 180，是半圆之度数。

（4）任意相邻两扇区内任意相邻 2 环 4 数之和加中央 12 之半，也是半圆度数 180。

（5）任意一个整环内，上下相对的 4 小环以及左右相对的 4 小环内

4 数之和加中央 12 之半，也是半圆度数 180。

（6）从半径 A 两侧 2 个相邻扇区中取相邻的任意 2 个小环，再从半径 C 两侧 2 个相邻扇区中取相邻的任意 2 个小环，其中的 4 个数相加再加中央 12 之半，也都等于 180。

（7）从半径 B 两侧 2 个相邻扇区中取任意奇（或偶）数号环中的 2 个数，再从半径 D 两侧 2 个相邻扇区中取任意偶（或奇）数号环中的 2 个数相加，再加中央 12 之半，也都等于 180。

请读者自行统计一下，在八轮幻圆中，有多少组 8 数之和加中央数 12 恰为 360，又有多少组 4 数之和加中央数 12 之半恰为 180！

下面再把偏心圆加进来看它们造成什么样的结果。在八轮幻圆中，共有 4 组偏心圆，分别以 A、B、C、D 为圆心，每组有 6 个同心圆。这样，这 4 组同心圆共形成 $4\times5=20$ 个环，每个环中也不多不少包含 8 个数，把 8 个数相加再加中央的 12，也都是 360！以 A 为圆心的那组偏心圆为例，它由内向外 5 个环中的数分别是（21，68，28，45，42，59，19，66），（65，18，51，43，44，36，69，22），（23，70，37，52，35，50，27，64），（72，16，49，34，53，38，71，15），（14，63，39，54，33，48，24，73），和均为 348，加中央的 12，恰为 360。以 B、C、D 为圆心的其他 3 组偏心圆也都如此。这样，我们看到，富兰克林八轮幻圆中除中央 12 外的 $8\times8=64$ 个数，不但被 9 个主圆的 8 个环均匀分割成和为 348 的 8 组，同时还被 4 组偏心圆均匀分割成和也是 348 的 $4\times5=20$ 组，真可谓匠心独具。尤其令人惊叹的是，如果把这些由偏心圆形成的环以八轮幻圆的主水平中轴线一分为二的话，上、下半环（对于以 B、D 为圆心的同心圆而言是对称和同大的；对于以 A、C 为圆心的同心圆而言，是不对称且一大一小的 2 个半环）中 4 数之和再加中央数 12 之半，也仍然都等于 180！仍以 A 为圆心的那组偏心圆为例，水平中轴线把它分割成的上部半个大环中的数由内向外分别是（19，66，21，68），（69，22，65，18），（27，64，23，70，），（71，15，72，16），（24，73，14，63，）；下部半个小环中则是（28，45，42，59），（51，43，44，36），（37，52，35，50），

(49，34，53，38)，(39，54，33，48)，和均为174，加中央数12之半，都是180。其他3组偏心圆环也都如此，真令人匪夷所思。

需要指出的是，我们书上的这个八轮幻圆是从英文版的书上翻印的，正如杨辉的聚6图在流传过程中造成了错误一样，这个图也有1个错误，即第四象限靠近垂直半径那个扇区中，最外层的2个数41与47应该对调一下。还需要指出的是，八轮幻圆加上4组偏心同心圆以后，造成图案十分复杂，难以分辨，偏心圆造成的上述效果很难看出来。《数学的奇妙》（陈以鸿译，上海科技教育出版社，1999）中含混地说"在互相缠结的圆之间的数的和也相同"。《幼狮数学大辞典》（台湾幼狮文化事业公司，1982）干脆把这些偏心圆都略去。倒是在富兰克林1790年去世后不久（1795年）出版的4卷本《数学与哲学辞典》（A Mathematical and Philosophical Dictionary，2000年由Thoemmes Pr. 重印）中才有对此的详尽说明，笔者也是通过它才终于弄清富兰克林八轮幻圆的种种奥妙的。

对于富兰克林的八轮幻圆，湖南岳阳六中的李抗强老师还有一个有趣的发现，那就是可以把它化圆为方，仍然保留其原有全部特性。李老师的方法是这样的：把富兰克林八轮幻圆画在一张柔性的纸上，沿偏心圆圆心 A 上方的半径用剪刀把它剪开后变成一个矩形或正方形，得到的是一个幻方，如图6-23所示。

14	25	30	47	46	57	62	73
72	63	56	41	40	31	24	15
23	16	39	32	55	48	71	64
65	70	49	54	33	38	17	22
21	18	37	34	53	50	69	66
67	68	51	52	35	36	19	20
12	27	28	43	44	59	60	75
74	61	58	45	42	29	26	13

图6-23　八轮幻圆化为八阶幻方

显然，这个幻方的一行对应于八轮幻圆中的一个环，一列对应于八轮幻圆中的一个扇形，而幻方中的5条曲对角线正好对应于以A为圆心的5个偏心圆，而且曲对角线正中（拐角两侧）那一半正好对应于偏心圆被水平中轴线分割成的小半环，曲对角线上方开口处那一半正好对应于偏心圆被水平中轴线分割成的大半环！类似的，沿偏心圆圆心B、C、D的半径把它剪开后变成的幻方，具有相应的特性。

李老师的这一研究成果发表于由中国幻方研究者协会主编的不定期刊物《中国幻方》第2期（由香港天马图书有限公司于2006年10月出版）。

6.5 幻星

幻圆以外，变形幻方中最常见的就是各种各样幻星了。幻星（magic star）就是在星形几何图案的顶点和交点处布数，使其每条边上的若干数之和相等。最著名的幻星是如图6-24所示的六角形幻星。这个幻星9条边上的5数之和都等于46。此外，它还是严格对称的：每2个相对顶点上的2数之和均为7（这恰和骰子上数的分布一样：骰子上相对2面上2数之和为7）；中央六边形中，相对顶点和相对边中点2数之和

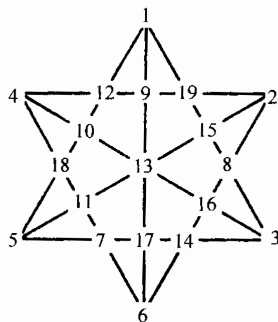


图6-24　六角幻星

均为26，位于中央的数则是13（13这个数在西方被认为是不吉利的，叫魔鬼数evil number）。在古老的犹太人的民间传说中，死人的灵魂叫“的伯克”（Dybbuk），可以回到人间，进入活人的身体并占有这个活人。希伯来人有种秘密的宗教仪式对“的伯克”进行召唤，在这种仪式上就要用到上面介绍的六角幻星。

下面我们介绍一种比较简单的六角幻星，即对顶角之间没有连线的六角形。这样的六角形中，每条边的2端加上它与其他边的2个交点，可以放4个数，共有6条这样的边，要用到1～12，如何分布使这6条边上4数之和都相等？解决这个问题是不难的，而且可能的布局（不考虑旋转和反射）有80种之多，其中有12种不但6条边上的4数之和是26，外围6个顶点的6数之和也是26，如图6-25（b）。另外有6种则不但每条边上的4数之和是26，组成六角星的2个互相倒扣的大三角形3顶点之和也是26，这2个三角形相交形成的中央六边形6顶点之和也是26。图6-25（c）给出其中的一个，读者不妨找找其他几个。但不管形成具有怎样性质的幻六角星，有一点是共同的，即2个大三角形3顶点上数之和必相等。这一点我们可证明如下（图6-25（a）），设幻方常数为M，则有

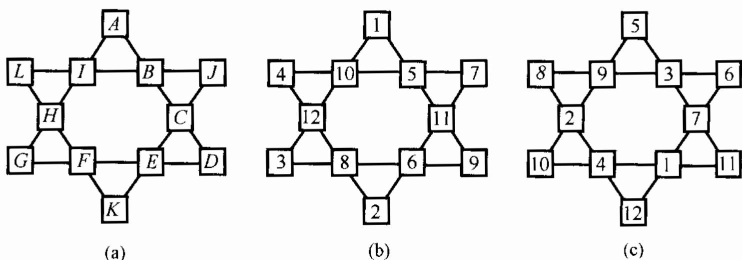


图6-25 幻六角星

①$B=M-L-I-J$

②$C=M-A-B-D$

③$E=M-J-C-K$

$$④F=M-G-E-D$$

$$⑤H=M-L-F-K$$

$$⑥I=M-A-H-G$$

将①式代入②式得 C 的一个新的表达式，把它代入③式得 E 的一个新的表达式，把它代入④式……最后获得 I 的一个新的表达式

$$⑦I=I+2\ (L+J+K)-2\ (A+G+D)$$

$$\therefore L+J+K=A+G+D$$

由此可见，只要是幻六角星，2 个倒扣的大三角形 3 顶点之和必相等。

读者可能要问，要说“星”，我们最熟悉、见得最多的是五星，为什么不说说“幻五星”？原来，用连续数组成正规的幻五星是不可能的。让我们先来证明这一点。对五星而言，每条线在两端和另外 2 线相交，在中间和另外 2 线相交，也就是说，每个点都在 2 条线上。这样，如果用 1～10 可以组成幻星的话，5 条线上各 4 数之和，也就是幻和的 5 倍应等于这 10 个数之和的 2 倍。因此幻和 $M=\frac{2}{5}(1+2+3+\cdots+10)=22$。下面我们来看 2 种情况。

（1）对于包含 1 的 2 条线而言，其他 6 个数之和应为 42。由于 $9+8+7+6+5+4=39$，不足 42，可见必须以 10 代替 4，5，6 之一，也就是说 10 必须在这 2 条线上；

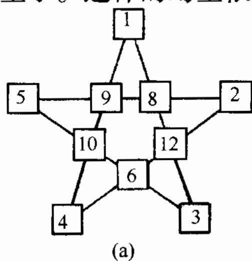
（2）对于包含 2 的 2 条线而言，其他 6 个数之和应为 40。同上面一样理由，10 必须在这 2 条线上。

设 L_1 包含 1 和 10，L_2 包含 2 和 10，则 L_1 上其余 2 个数只有以下 3 种情况：(3，8)，(4，7) 或 (5，6)，而 L_2 上其余 2 数只有以下 2 种情况：(3，7) 或 (4，6)。由于这 2 条线只能相交 1 次，因此 L_1 和 L_2 上数的分布只有 2 种可能，一种是 L_1 为 (1，10，3，8)，L_2 为 (2，10，4，6)；另一种是 L_1 为 (1，10，5，6)，L_2 为 (2，10，3，7)。现设第三条线 L_3 是包含 3 的（当然不会再包含 10），则对于上述 L_1、

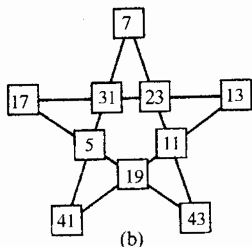
L_2 组合的第一种可能，L_3 必须包含 L_2 中不是 10 的某个数，即（2，4，6）之一；而 L_1 中也有 3，因此（1，3，8）这 3 个数都不可能再出现在 L_3 上。也就是说，L_3 上有 3，还有一个数最大是 6，2 者相加为 9，而另 2 个数只能是 5、7，无法形成幻和，所以是不可能的。

再看对于 L_1、L_2 组合的第 2 种可能，L_3 上唯一可能的组合是（3，6，4，9），与 L_1 共有 6。这时我们假设有第四条线 L_4 包含 4，但不包含 3。这样 L_4 中必须包含 8，因为它不在 L_1、L_2、L_3 中，而每个数必须出现在 2 条线上，另一方面，L_4 中必须包含 1 或 5，因为它必须与 L_1 相交，而 L_1 中的 10 已与 L_2 共有，6 已与 L_3 共有；此外 L_4 中必须包含 2 或 7，因为它也必须与 L_2 相交，而 L_2 中的 10 已与 L_1 共有，3 已与 L_3 共有。不管取哪种可能组合即（4，8，1，2），（4，8，1，7），（4，8，5，2），（4，8，5，7），其和均不等于幻和，至此可证明用1～10是不能构成幻五星的。

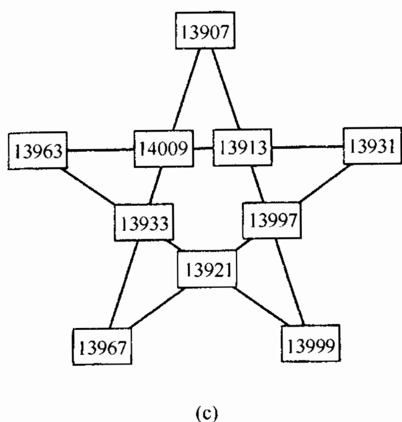
在用连续数不能构成幻五星的情况下，我们只能用非连续数去构成幻五星了。这样的幻星依然可以五彩斑斓。图6-26（a）用 1～6，8～10



(a)



(b)



(c)

图 6-26　幻五星

和 12，中间舍弃了 7 和 11，幻和为 24。用这组数可构成 12 种不同结构的幻五星。图 6-26（b）是用素数构成的幻五星，幻和为 84；而图 6-26（c）是用 10 个连续素数组成的最小可能的幻五星，幻和是 55816。

6.6 幻矩形

所谓幻矩形是指 $n \times m$ 的数字阵列，具有某些特殊的数学性质。幻矩形的构成想起来似乎比其他变形幻方容易，但实际上很难，因此能见到的设计得精巧的幻矩形远少于其他变形幻方（如幻圆、幻星等）。图 6-27 给出的一个是为数不多的幻矩形中较为成功的一个，它是一个 4 ×8 的方阵，填入 1 ~ 32，其每列 4 数之和均为 66，而每行 8 数之和则均为 132，恰为 66 之 2 倍，此外，其左右两半 2 个 4 ×4 方阵 2 对角线上 8 数之和则都是 132。这是目前已知的对称性最好的幻矩形，是谁发明的已不得而知。它的构成与幻方的连续摆数法有些近似。

1	10	11	29	28	19	18	16
9	2	30	12	20	27	7	25
24	31	3	21	13	6	26	8
32	23	22	4	5	14	15	17

图 6-27 幻矩形

辽宁师范大学的周开其先生构成了一个与上述幻矩形有相同性质，但比它大得多的 16 × 32 的幻矩形，如图 6-28 所示。在其中填入 0 ~ 511，每列 16 数之和均为 4088；每行 32 数之和，以及左右两半 2 个 16 ×16 方阵 2 对角线上 32 数之和，都是 8176，恰为 4088 的 2 倍。这是笔者见到的最复杂而精巧的幻矩形之一。

201	446	310	94	97	414	65	417	180	52	196	377	459	315	134	331	434	58	216	104	453	77	295	407	34	87	168	340	477	343	424	171
384	380	217	127	430	131	294	81	46	483	465	323	28	179	188	332	346	66	471	165	385	40	445	126	232	298	341	169	213	170	279	342
438	118	292	348	393	73	219	163	14	403	84	324	497	187	108	427	200	455	42	405	56	469	311	106	136	88	490	375	423	21	394	117
125	142	390	386	148	121	369	363	252	30	425	185	481	326	259	86	309	336	397	114	247	175	202	264	503	280	8	370	231	327	141	184
358	395	123	161	116	388	153	350	396	276	262	115	235	249	435	76	79	447	112	399	124	432	64	387	479	426	23	160	32	488	85	351
155	345	36	475	83	166	356	428	467	268	44	190	243	334	321	177	31	13	362	480	306	498	72	149	277	229	439	349	282	205	234	162
75	371	473	38	361	436	140	150	499	110	251	468	12	260	401	43	167	173	151	344	207	338	437	360	373	421	74	138	90	304	119	392
372	129	62	284	139	382	227	449	257	241	491	41	270	20	254	470	101	506	303	410	224	287	208	5	82	109	383	322	429	402	128	189
137	164	451	225	374	347	286	60	113	233	22	398	278	489	78	433	464	7	47	366	152	145	359	504	440	71	130	98	18	493	381	413
263	91	35	248	412	99	476	420	502	193	230	206	9	318	281	305	408	367	317	103	194	197	144	314	431	487	24	461	80	416	50	95
308	422	203	51	300	460	211	89	452	59	283	406	102	409	228	105	271	37	240	61	474	312	450	199	274	157	389	191	354	122	237	320
250	67	265	261	246	17	444	494	11	3	508	337	500	68	174	443	242	53	269	223	357	458	154	288	0	400	330	48	181	111	463	511
222	353	289	484	158	492	27	19	6	457	313	307	54	198	505	204	253	472	210	147	39	364	301	258	69	442	183	333	328	93	178	418
291	297	220	419	209	214	302	92	329	316	378	172	133	195	339	182	256	456	192	448	319	55	63	255	239	26	485	415	495	16	272	96
236	156	478	462	335	49	33	238	57	454	135	132	376	441	379	70	45	146	466	290	285	226	365	221	509	352	120	176	159	391	335	2
273	212	244	25	267	299	486	275	507	510	1	107	411	100	4	404	482	496	293	29	266	15	218	245	10	215	501	143	296	186	368	325

图 6-28　16×32 的大幻矩形

6.7 魔蜂窝

魔蜂窝如图 6-29 所示，在西方被叫做 magic hexagon。我们认为把它叫做魔蜂窝更形象和直观一些。这是由 19 个六边形组成的一个蜂窝状的阵列，内中填入1～19，使得每条直线（垂直、左斜或右斜，每条直线上包括 3 个、4 个或 5 个数）的数字之和都相等，等于 38，因此共有 15 组幻和，相当于 19 子作 49 子用。关于魔蜂窝的来历，有 2 个不同的说法。一个说法是：它最早由英国一个叫 Isle of Man 的小岛上一所叫 Andreas school 的学校的一名教师威廉·拉得克利夫（William Radcliffe）在 1895 年发明，并以“38 之谜”（38Puzzle）为名进行了专利申请，在英国和美国获得专利。但是他的市场开发没有成功，逐渐湮没了。60 年以后，一个叫汤姆·威克斯（Tom Vickers）的人重新发现了魔蜂窝，将之公布在 1958 年 12 月的“数学杂志”（The Mathematical Gazette）上。另一个说法是魔蜂窝由一个叫克利福德·亚当斯（Clifford W. Adams）的铁路职工花了 50 多年时间发明的。亚当斯就职于伦敦以西约 80 公里处的雷丁的铁路公司（Reading Railroad Co.），是一个业余的数学迷，从 1910 年就开始琢磨构造魔蜂窝。为此，他用纸板剪了 19 块六角形，上面写上 1～19，一有空就摆弄，但始终没有成功。退休以后他有了更多时间，就更致力于魔蜂窝的开发，甚至病了在病床上也继续摆弄他的 19 块纸板，终于在 1957 年在医院里他摆成了魔蜂窝！这使他欣喜若狂，赶忙用纸把魔蜂窝记录下来。没有想到的是，在出院的时候，他把记录魔蜂窝的纸片给弄丢了！在懊丧之余，他试图继续把魔蜂窝恢复出来，这一试又耗费了他 5 年时间，到 1962 年 12 月，他偶然在

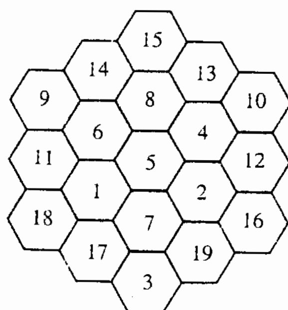


图 6-29　魔蜂窝

一本书中找到了他记录魔蜂窝的纸片，这才赶紧把它寄给著名的娱乐数学专家伽德纳，使之公之于世。看来这两种说法都是真的，这说明魔蜂窝是一项同时发明，就像集成电路是基尔比和诺伊斯两人同时独立发明的一样。

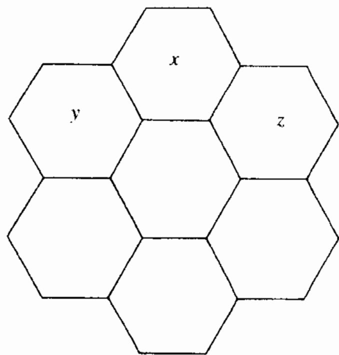


图 6-30　$d=3$ 的蜂窝不可能成为魔蜂窝的证明

魔蜂窝公布以后，引起人们极大的兴趣，许多人想构造出新的魔蜂窝。所谓新的魔蜂窝，一指同样大的蜂窝，但有不同的数字分布；二指构造更大的魔蜂窝，比如在已有魔蜂窝的四周再添一圈 18 个蜂窝，让它仍具有以上特性。至于比现有魔蜂窝小的蜂窝，不可能具有这一特性，这从图 6-30 中很容易看出来：要使 $x+y=x+z$，势必要使 $y=z$，而一个蜂窝中是不允许有 2 个蜂巢中放同样的数的。但人们在构造新魔蜂窝方面的努力始终没有取得成果。后来，洛杉矶的数学家查尔斯·特里格（Charles W. Trigg）在 1963 年证明，用连续的自然数 1，2，3，…能构成的魔蜂窝只此一家，别无分店！至此，人们才放弃在这方面作无效的努力。特里格的证明方法如下：

对于直径为 d 的蜂窝（d 当然只能取奇数），蜂巢个数为 $(3d^2+1)/4$ 个，因此填入其中的数为 $1\sim(3d^2+1)/4$，其和为

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3d^2+1}{4}\right)\left(\frac{3d^2+5}{4}\right)=\frac{1}{32}(9d^4+18d^2+5)$$

因此，每列上数之和应为

$$\frac{1}{32}\left(9d^3+18d+\frac{5}{d}\right)$$

显然只有 $d=5$ 时，该数为正整数。因此魔蜂窝只有 $d=5$ 的一种。

特里格的证明当然是正确的，但并不完美，因为他只证明了 $d\neq5$ 的魔蜂窝不存在，但未证明 $d=5$ 的魔蜂窝有唯一的数字分布。

1969 年，滑铁卢大学 2 年级的学生弗朗克·阿莱尔（Frank Allaire）

给出了一个更加出色的证明，为魔蜂窝的研究划上了一个完美的句号。对阿莱尔的证明感兴趣的读者可参阅《数学珍宝》第一卷（R. Honsberg: Mathematical Gems I）。这里需要指出的是，17 世纪的朝鲜数学家 Choe Sok-Chong (1646～1715) 就曾经发明过一个不完整的魔蜂窝，见图6-31。在他的这个缺少2侧2个蜂巢的蜂窝中，他在每个蜂巢的每个顶点上都放一个数，这样，5个蜂巢共有20个数，从1～20，而每个蜂巢周边6数之和均为63，其构思也十分精巧（参阅英国数学史学会前主席 Ivor Grattan-Guinness 所著：The Rainbow of Mathematics，W. W. Norton & Co.，1997）。

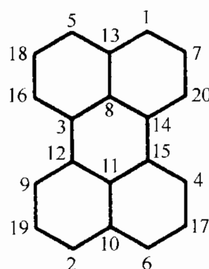


图6-31　朝鲜数学家17世纪发明的魔蜂窝

6.8 幻环

幻环也是变形幻方中的一种。所谓幻环就是若干圆以某种方式相交，在其分割出的空间中分布自然数，使符合一定条件（通常是位于各个圆中的若干数之和相等）。幻环的种类很多，也有许多构造方法，我们这里只介绍由几个同样大小的圆相交所构成的幻环，更多的幻环可参阅昆明理工大学杨高石教授编著的《幻环探秘》（国际文化出版公司，2005）。

图6-32是一个国庆55周年纪念幻环。这个幻环是由8个圆相交形成的，形状像一朵盛开的玫瑰，非常美丽。8圆相交分割出57个空间，填入1～57。它的巧妙之处是位于中心的正好是中华人民共和国成立55周年的周年数55，而其下对称分布着1949和2004，以及表示“十一”国庆的10和1。每个圆中28数之和为999，寓意国运长久。

2001年7月13日，国际奥委会在莫斯科会议上表决通过由北京承办2008年的第29届奥林匹克运动会，使全国一片欢腾。在申奥过程

中，杨高石先生为表达对申奥的支持，以五环为背景，发起“幻五环”征解活动，引起全国中小学生的广泛兴趣，参加者踊跃，最后获得4组解答，如图6-33所示，其中幻和为11和14的各有一解，幻和为13的有2个解。申奥成功后，杨高石先生和中国幻方研究者协会秘书长王忠汉先生把这4个幻五环制成铜质彩色纪念屏送给北京奥申委。王忠汉先生后来又开发出如图6-34所示的幻五环，其特点是：

（1）环中的15个数都是素数；

（2）每个圆中的4数或6数或8数之和都是2008，正是北京奥运会举行的年份。

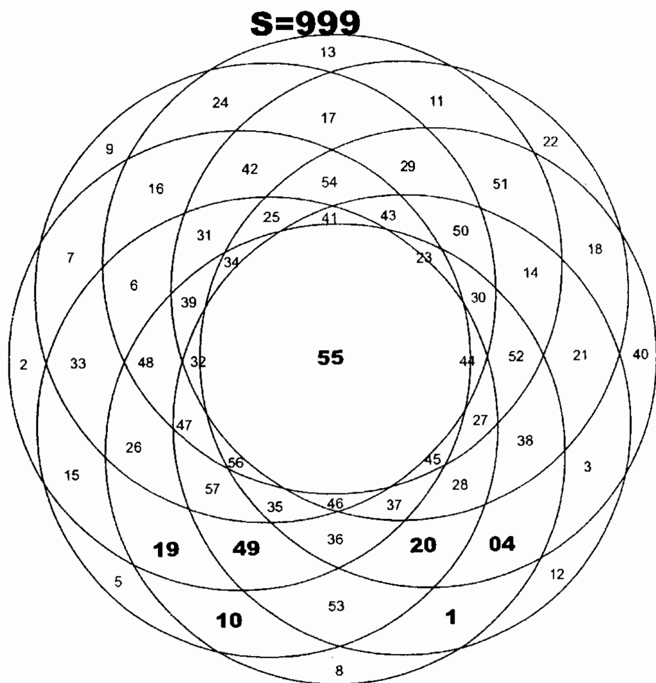


图6-32　国庆55周年纪念幻环

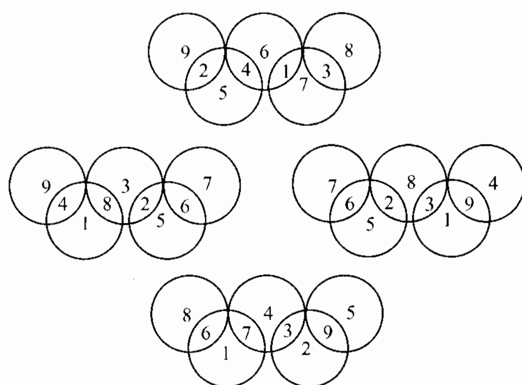
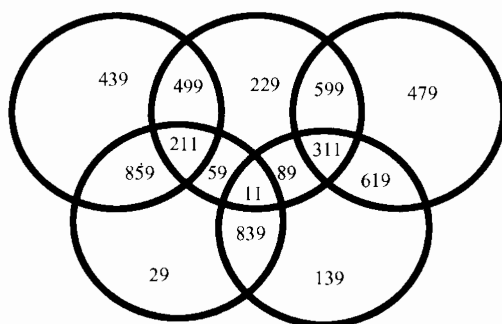


图 6-33 幻五环



$S_{五}=2008$

图 6-34 北京奥运会纪念幻五环

7 进一步的“幻中之幻”

人们认识事物，总是由简到繁，由表及里；人们探索自然和科学中的奥秘，也总是由浅到深，由低级到高级。对幻方的认识和研究也是这样。在第4章中，我们介绍了一些“幻中之幻”，是在普通幻方的基础上，加入了一些新的特性，如对称幻方，泛对角线幻方，以棋步形成的幻方等等。本章进一步介绍一些“幻中之幻”，其复杂程度要比第4章中的幻方高出许多。

7.1 双幻方

双幻方（bi-magic square，或 doubly magic square）有两种含义，一种是指某个幻方既是加幻方，又是乘幻方，具有“双重国籍”；另一种是指幻方中的数按行、列、2条对角线相加都相等，而把这些数都取平方以后再按行、列、2条对角线相加仍然都相等，即幻方背后隐藏着又一个幻方。前一种含意的一个双幻方如图7-1(a)所示，它既是一个幻和为840的加法幻方，同时又是一个幻方常数为2 058 068 231 856 000的乘法幻方。后一种含意的双幻方如图7-1(b)，表层幻和为260，深层幻和为11 180。后一种含意的双幻方首先是弗洛劳夫（Frolow）于1892年发现的，引起众多数学家的兴趣。到1901年，赖利(A. Rilly)已给出200多个双幻方，且证明8阶以下不可能有这样的双幻方。但图7-1(b)中的8阶双幻方是肖茨（M. H. Schots）发现的。图7-2中我们给出由杜德尼发现的又一个双幻方，其表层的幻和也是260，它的每一个数取平方后所形成的深层幻方的幻和也为11 180。但值得注意的是，这个幻方中的16个2×2小方阵中，两对角线上数字之和均为65，因此还是一个

半泛对角线幻方，而且这16个小方阵4数之和也都相等。但它不是个对称幻方，因此可称之为“几乎最完美的幻方”（almost most perfect magic square）的双幻方。

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

(a)

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

(b)

图7-1　双幻方的两种含意

7	53	41	27	2	52	48	30
12	58	38	24	13	63	35	17
51	1	29	47	54	8	28	42
64	14	18	36	57	11	23	37
25	43	55	5	32	46	50	4
22	40	60	10	19	33	61	15
45	31	3	49	44	26	6	56
34	20	16	62	39	21	9	59

图7-2　杜德尼的双幻方

图7-3给出了一个9阶对称的双幻方，是由希思（R. V. Heath）发现的。其表层幻方的幻和是369，而深层幻方的幻和是20 049。图7-3

中这个幻方中的数是以9进制形式给出的，这样，这个幻方同时也是一个拉丁方（Latin square），即所有行、列、2条主对角线上的“个位数”和“十位数”位置上都不重复地同时出现0～8这9个数字。读者当不难把它恢复为十进制形式的数。

76	82	64	15	27	00	41	53	38
11	23	08	46	52	34	75	87	60
45	57	30	71	83	68	16	22	04
62	74	86	07	10	25	33	48	51
03	18	21	32	44	56	67	70	85
37	40	55	63	78	81	02	14	26
84	66	72	20	05	17	58	31	43
28	01	13	54	36	42	80	65	77
50	35	47	88	61	73	24	06	12

图7-3　9阶对称双幻方

在双幻方的基础上，人们以后又进一步发现了“三次幻方”（trebly-magic square），即幻方中的数不但取平方后仍为幻方，取立方后也仍然是幻方。这样，在一个幻方背后，竟然还隐藏着2个进一步的幻方！构成这样的幻方当然十分困难。学术界原先认为三次幻方的阶不可能低于64。但后来陆续有人构造出了32阶以至16阶的三次幻方。目前这方面的世界记录是12阶，首先由德国学者特鲁姆泼（Walter Trump）于2002年构成。2003年2月，延安教育学院的高治源和西藏地质调查院的潘凤雏合作，一举编出2个12阶三次幻方！我们这里给出其中的一个，见图7-4。这个幻方的幻和为870，各数取平方后的幻和为83810，各数取立方后的幻和为9082800。

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
17	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	81	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

图 7-4　中国学者创造的 12 阶三次幻方

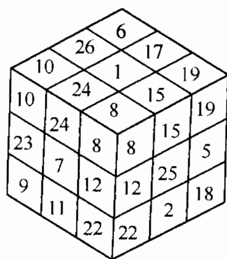
7.2 幻立方（魔方）

20 世纪 70 年代末、80 年代初，全世界曾经风行一种由匈牙利学者发明的智力玩具叫魔方，它是由 3×3×3 个小方块组合在一起但能各个方向转动的立方体，每个小立方体表面涂以不同颜色，要求把大立方体的 6 个表面都转成同一颜色。我们这里的魔方或叫幻立方是指 $n\times n\times n$ 的 3 维幻方，其 n^2 个行（row），n^2 个列（column），n^2 个纵列（pillar 或 file）以及 4 条空间对角线上的 n 个数之和都相等，这叫基本魔方或叫“半完美魔方”（semiperfect magic cube）；如果 3 个方向上的每个横截面本身就都是幻方，即不但行、列上 n 个数之和等于幻和，其 2 条主对角线也都等于幻和，那么就叫“完美魔方”（perfect magic cube）。显然，不管是半完美的还是完美的，魔方的幻和应等于 $\frac{1}{2}n(n^3+1)$；半完

美魔方中有 $3n$ 个平面半幻方，满足幻和的 n 数之和有 $3n^2+4$ 组，完美魔方则有 $3(n+2)$ 个平面幻方（除了水平、垂直、纵切 3 个方向上各有 n 个外，通过立方体每一对相对边的截面也是一个幻方），满足幻和的 n 数之和有 $3n^2+6n+4$ 或 $3n(n+2)+4$。

可以证明，不管是半完美的还是完美的魔方，对于单偶阶即阶 $n=2(2m+1)$ 形式的情况是不存在的，而对奇数阶及双偶数阶（$n=2\cdot 2m$），人们已经找出了构造的方法，而且从数学上给予了一般的证明。由于比较繁复，我们这里就不介绍了，有兴趣的读者可参阅鲍尔的娱乐数学名著（W. W. R. Ball：Mathematical Recreations and Essays，London：Macmillan & Co.，1956，217～221）。下面我们由低阶到高阶介绍几个有趣的魔方。

图 7-5 是一个最简单的 3 阶基本魔方，幻和为 42，共 31 组。图中把魔方分解成顶层、中间层和底层 3 层展示。已经证明，构成 3 阶和 4 阶完美魔方是不可能的。



10	24	8
23	7	12
9	11	22

26	1	15
3	14	25
13	27	2

6	17	19
16	21	5
20	4	18

图 7-5　3 阶基本魔方

3 阶魔方不可能是完美的可用反证法证明如下：设有 3 阶完美魔方，取平行于该立方体表面的任一方阵，设它的第一行中的 3 个数是 A、B、C，第三行中的 3 个数是 D、E、F，第二行中间的一个数是 X。因为 3 阶魔方的幻和为 42，它又是完美的，所以必有以下等式

$$A+B+C=42$$

$$D+E+F=42$$

$$(A+X+F)+(C+X+D)+(B+X+E)=3\times42$$

$$\therefore\quad 3X+(A+B+C)+(D+E+F)=3\times42$$

由此，$3X=42$，$X=14$

注意，我们以上的讨论是针对魔方中的任意一个截面进行的，因此结论适用于魔方中的任意截面，也就是说，魔方中任意截面的正中元素都应取值14。但按规定，魔方中任意一个数都不能重复出现，这就证明了3阶完美魔方是不可能存在的。

图7-6是一个4阶基本魔方，幻和为130。它虽然不是一个完美魔方，却是一个泛对角线魔方（pan-diagonal magic cube)，因为它不但有基本魔方的 $3\cdot4^3+4=196$ 个行、列、纵列、对角线等于幻和，还有一批空间的折对角线（space broken diagonal）上4数之和也等于幻和。对于4阶魔方的情况，空间折对角线的形成有2种情况，一种是立方体的每个顶角同去掉这个顶角所在的3个方向上的3个层面后，留下的那个 $3\times3\times3$ 的小立方体的4条对角线，形成4条空间折对角线。8个顶角共形成32条这样的空间折对角线。我们下面只给出其中的一组，其他7组读者可自行写出

(43, 1, 22, 64), (43, 13, 22, 52)

(43, 61, 22, 4), (43, 49, 22, 16)

60	37	12	21	7	26	55	42	57	40	9	24	6	27	54	43
13	20	61	36	50	47	2	31	16	17	64	33	51	46	3	30
56	41	8	25	11	22	59	38	53	44	5	28	10	23	58	39
1	32	49	48	62	35	14	19	4	29	52	45	63	34	15	18

图7-6　4阶泛对角线魔方

形成空间折对角线的另一种情况是：把 $4\times4\times4$ 的立方体看成是由上下各4个 $2\times2\times2$ 的小立方体组成的，上下左右前后相对的2个小立方体的每2条空间平行的对角线形成空间折对角线。这样就有 $4\times4=16$ 条这样的空间折对角线。下面我们也只写出其中的一组，其他3组读者可自行写出

$$(54,\ 33,\ 11,\ 32),\ (43,\ 64,\ 22,\ 1)$$

$$(30,\ 9,\ 35,\ 56),\ (3,\ 24,\ 62,\ 41)$$

可以看出，第一种折对角线每一组中有 2 个数是相同的，而第二种折对角线中的数全是不同的。

为了使读者对空间折对角线的构成有一个比较具体的概念，我们把上述 4 阶泛对角线魔方画成立体形式如图 7-7（层面次序同图 7-6 有所不同）。类似于平面的泛对角线幻方，如果把相同的泛对角线魔方上下左右前后一个个排列起来，那么任取其中的 4 ×4 ×4 的立方体仍将是一个泛对角线魔方，任取一根长度为 4 的对角线其上数字和将等于幻和。

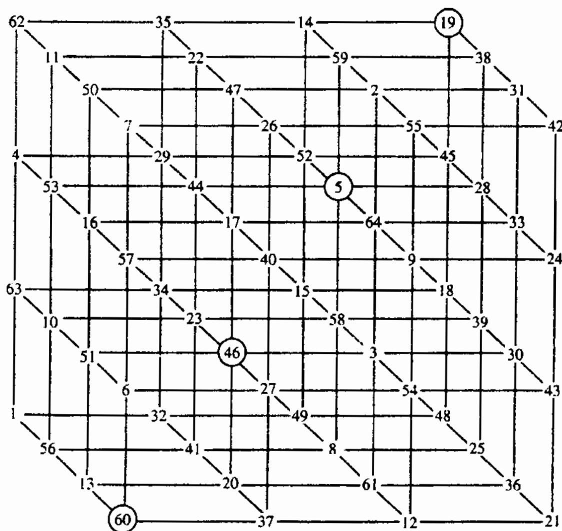


图 7-7　4 阶泛对角线魔方的立体示意图

下面的图 7-8 给出的也是一个 4 阶的泛对角线魔方，但非常有趣的是，把立方体的 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ4 层分解成 4 面铺在一个平面上，它竟然形成一个 8 阶幻方！这个幻方还有一个特点，即间隔着在任意行、列、对角线上取 4 数之和都等于 4 阶幻方的幻和 130。这个 4 阶魔方优于前述 4 阶魔方：如图 7-8 的 4 个层面（即 8 阶幻方的上下左

Ⅰ				Ⅱ			
1	8	61	60	48	41	20	21
62	59	2	7	19	22	47	42
52	53	16	9	29	28	33	40
15	10	51	54	34	39	30	27
32	25	36	37	49	56	13	12
35	38	31	26	14	11	50	55
45	44	17	24	4	5	64	57
18	23	46	43	63	58	3	6
Ⅳ				Ⅲ			

图 7-8　可以组成 4 阶魔方的 8 阶幻方

右 4 块）上，每个层面本身都是一个完整的4阶幻方，不但行和列，2条对角线上数字之和也都等于幻和，也就是说，作为同样的泛对角线魔方，这个魔方比前面那个魔方要多出 8 条等于幻和的直线，总数达到 252 条之多。这个魔方也是海斯发明的。

下面我们给出一个 7 阶的完美魔方如图 7-9。这个奇数阶的魔方是用类似于普通幻方的连续摆数法构成的，其普通向量是（1，-2），中断向量有 2 个，小中断向量用于确定在一个面上摆 7 个数以后如何转到下一面摆数，向量值为（2，0）；大中断向量用于确定在 7 个面上摆好 $7\times7=49$ 个数以后如何转到下一轮的 49 个数，向量值为（0，1）。摆数过程中，设想行、列、面都是循环相接的。起始 1 置于中间一面（Ⅳ面）中间一列的最顶上一格以后，按普通向量（1，-2）在该面摆好 7 个数以后，按小中断向量（2，0）将 8 置于下一面（Ⅴ面）的第 5 列第 3 格（因为 7 在上一面的第 3 列第 3 格），开始下一组 7 个数的摆放。按上述办法摆好 49 个数以后，按大中断向量（0，1）将 50 置于Ⅲ面 49 的下方，开始下一轮的大循环，直至把 343 个数全部摆好，一个 7 阶的完美魔方就形成了。在这个完美魔方中，总共有 27 个 7 阶完全幻方，有 193 组 7 数之和为 1204。

从以上说明来看，奇数阶魔方的构成似乎不难。但对于偶数阶魔方，情形有所不同。例如，你能看出图 7-10 所给出的 8 阶魔方是怎样构

Ⅰ

322	87	153	261	33	141	207
29	144	210	318	90	149	264
86	152	260	32	147	206	321
143	209	317	89	148	263	35
151	266	31	146	205	320	85
208	316	88	154	262	34	142
265	30	145	204	319	91	150

Ⅱ

100	215	323	95	161	269	41
157	272	37	103	211	326	98
214	329	94	160	268	40	99
271	36	102	217	325	97	156
328	93	159	267	39	105	213
42	101	216	324	96	155	270
92	158	273	38	104	212	327

Ⅲ

277	49	108	223	331	54	162
334	50	165	280	45	111	219
48	107	222	330	53	168	276
56	164	279	44	110	218	333
106	221	336	52	167	275	47
163	278	43	109	224	332	55
220	335	51	166	274	46	112

Ⅳ

62	170	285	1	116	231	339
119	227	342	58	173	281	4
169	284	7	115	230	338	61
226	341	57	172	287	3	118
283	6	114	229	337	60	175
340	63	171	286	2	117	225
5	113	228	343	59	174	282

Ⅴ

232	298	70	178	293	9	124
289	12	120	235	301	66	181
297	69	177	292	8	123	238
11	126	234	300	65	180	288
68	176	291	14	122	237	296
125	233	299	64	179	294	10
182	290	13	121	236	295	67

Ⅵ

17	132	240	306	71	186	252
74	189	248	20	128	243	302
131	239	305	77	185	251	16
188	247	19	127	242	308	73
245	304	76	184	250	15	130
246	18	133	241	307	72	187
303	75	183	249	21	129	244

Ⅶ

194	253	25	140	199	314	79
202	310	82	190	256	28	136
259	24	139	198	313	78	193
309	81	196	255	27	135	201
23	138	197	312	84	192	258
80	195	254	26	134	200	315
137	203	311	83	191	257	22

图 7-9　一个 7 阶完美魔方

Ⅰ

19	497	255	285	432	78	324	162
303	205	451	33	148	370	128	414
336	174	420	66	243	273	31	509
116	402	160	382	463	45	291	193
486	8	266	236	89	443	181	343
218	316	54	472	357	135	393	107
185	347	85	439	262	232	490	12
389	103	361	139	58	476	214	312

Ⅱ

134	360	106	396	313	219	469	55
442	92	342	184	5	487	233	267
473	59	309	215	102	392	138	364
229	263	9	491	346	188	438	88
371	145	415	125	208	302	36	450
79	429	163	321	500	18	288	254
48	462	196	290	403	113	383	157
276	242	512	30	175	333	67	417

Ⅲ

306	212	478	64	141	367	97	387
14	496	226	260	433	83	349	191
109	399	129	355	466	52	318	224
337	179	445	95	238	272	2	484
199	293	43	457	380	154	408	118
507	25	279	245	72	422	172	330
412	122	376	150	39	453	203	297
168	326	76	426	283	249	503	21

Ⅳ

423	69	331	169	28	506	248	278
155	377	119	405	296	198	460	42
252	282	24	502	327	165	427	73
456	38	300	202	123	409	151	373
82	436	190	352	493	15	257	227
366	144	386	100	209	307	61	479
269	239	481	3	178	340	94	448
49	467	221	319	398	112	354	132

Ⅴ

381	159	401	115	194	292	46	464
65	419	173	335	510	32	274	244
34	452	206	304	413	127	369	147
286	256	498	20	161	323	77	431
140	362	104	390	311	213	475	57
440	86	348	186	11	489	231	261
471	53	315	217	108	394	136	358
235	265	7	485	344	182	444	90

Ⅵ

492	10	264	230	87	437	187	345
216	310	60	474	363	137	391	101
183	341	91	441	268	234	488	6
395	105	359	133	56	470	220	314
29	511	241	275	418	68	334	176
289	195	461	47	158	384	114	404
322	164	430	80	253	287	17	499
126	416	146	372	449	35	301	207

Ⅶ

96	446	180	338	483	1	271	237
356	130	400	110	223	317	51	465
259	225	495	13	192	350	84	434
63	477	211	305	388	98	368	142
425	75	325	167	22	504	250	284
149	375	121	411	298	204	454	40
246	280	26	508	329	171	421	71
458	44	294	200	117	407	153	379

Ⅷ

201	299	37	455	374	152	410	124
501	23	281	251	74	428	166	328
406	120	378	156	41	459	197	295
170	332	70	424	277	247	505	27
320	222	468	50	131	353	111	397
4	482	240	270	447	93	339	177
99	385	143	365	480	62	308	210
351	189	435	81	228	258	16	494

图 7-10　8 阶完美魔方

成的吗？8 阶魔方早在 1875 年就被发现了，但作者却没有留下姓名。这个图上的 8 阶魔方是 1970 年由宾夕法尼亚州当时年仅 16 岁的高中生迈尔斯（Myers）独立发现的。这个魔方有许多奇异的性质：

① 它是对称的，即魔方中任意对中心对称位置上的 2 数之和均为 513。

② 魔方中每条正交线和对角线上 8 数之和均为 2052。

③ 魔方 8 个顶角上 8 数之和也是 2052；且魔方内任意对中心对称的矩形体的 8 角上 8 数之和也是 2052。

④ 整个魔方可分割成 64 个 2 阶的小立方体（$2\times2\times2$），每个小立方体内 8 数之和也是 2052。

⑤ 这个魔方中的数是从 1 ~ 512。如果从 513 开始，顺序取其后的 512 个数，按相同分布规律组成进一步的 63 个魔方，连同原始的魔方，可以构成一个 64 阶完满魔方。在此基础上，以相同方式又可构成 512 阶魔方。依此类推，可构成任意 8^n 阶魔方（$n=1, 2, 3, \cdots$）。

7.3 四维魔方

幻方从平面的 2 维发展到立体的 3 维以后，没有停止脚步，继续向更高的维数进军。数学家约翰·亨德利克斯（John Robert Hendricks）先后开发出了 3 阶、4 阶甚至 16 阶的 4 维魔方（4D tesseract）。图 7-11 是其中“最简单”的一个 3 阶 4 维魔方投影到 2 维平面上的示意图，由图可见，4 维魔方由 8 个 $3\times3\times3$ 的小立方体组成，在示意图中，正立方体被投影成立柱形式，正对着我们的 2 个立方体（以 1 和 50 以及 44 和 57 分别为前后 2 个左顶角）前后左右各有 1 个立方体，上下也各有 1 个立方体。每个立方体的上下、左右、前后 6 个外侧面分别同另外 1 个立方体所共有，因此共形成 16 个顶点，32 条边。除了每个立方体的所有行、列、纵列、4 条对角线都是幻和 123 之外，相对顶点之间有 8 条连线（这也叫对角线吧！但是是 4 维立方体的对角线），它们是（1，81），（42，40），（61，21），（50，32），（44，38），（73，9），（14，68），（57，25）。这 8 根对角线相交于 4 维立方

体的中心，恰好是1～81 的中心数41，因此这些对角线上的3 数之和也都是幻和 123。此外，4 维立方体的 32 条边两两相对的边的中点的连线也都相交于4 维立方体的中心，并形成幻和，如（72，10），（6，76），（56，26）等，共16 组。

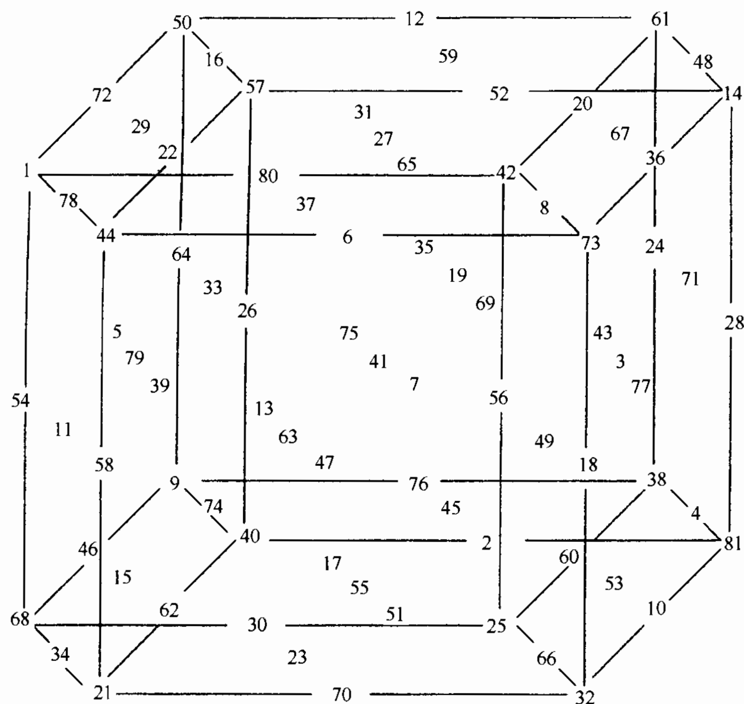


图 7-11　4 维魔方

亨德利克斯证明，可以构成 58 个不同结构的 3 阶 4 维魔方。而 4 阶 4 维魔方还能构成“泛对角线”的，亨德利克斯自己就开发出了一个这样的泛对角线 4 阶 4 维魔方。

7.4 一些奇特的魔幻方

前面我们介绍了 3 维、4 维的幻方，我们把它们叫做魔方。现在我

们再回到2维的幻方，介绍一些令人匪夷所思的幻方。为了强调其奇特，我们把它们叫做“魔幻方”。

首先一个魔幻方是“易位幻方”如图7-12（a）。这个幻方是一个非连续数4阶幻方，其幻和为242。如果你把这个幻方中所有数的个位与十位互易位置，如96变成69，25变成52，如此等等，成为图7-12（b），你会惊奇地发现，它不但仍然是幻方，而且幻和也维持不变，仍然是242。你说奇特不奇特？这个幻方在西方被叫做“mirror magic square”，不知道是谁发明的。

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

（a）

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

（b）

图7-12　易位幻方

下一个魔幻方是“颠倒幻方”，如图7-13（a），这也是一个4阶的非连续数幻方，其幻和为264。这个幻方中只用了4个数字，即1、6、8、9，把它们颠倒过来看，1与8仍为1与8，保持不变；而6与9则互易位置，即6成为9，9成为6。因此把整个幻方颠倒过来的话，就成为图7-13（b），令人惊奇的是，它也仍然是一个幻方，而且幻和同样是264！实际上，由于佚名作者的精心安排，正看和颠倒着看的这两个幻方中的16个元素完全是相同的，只是行、列位置发生了变动而已。除了这个令人惊叹不已的特性外，这2个幻方的对称性也非常好，除了行、列、2条主对角线上4元素之和为幻和外，它们的2条“2+2”形式的折对角线也等于幻和，此外，还有许多“四角方”也都等于幻和，如（61，88，99，16），（19，96，81，68），（86，69，18，91），（98，69，81，16）等。

19	61	88	96
98	86	69	11
66	18	91	89
81	99	16	68

(a)

89	91	66	18
68	16	81	99
11	69	98	86
96	88	19	61

(b)

图 7-13　颠倒幻方

以上 2 个魔幻方的发明者都已失传。下面介绍的第 3 个魔幻方幸好还留有发明人姓名，是阿根廷首都布宜诺斯艾利斯的罗道尔夫 · 库尔欣，他发明了一个“泛数字幻方”(pandigital magic square)。所谓泛数字幻方是指 n 阶方阵中的 n^2 个数，每个数都恰恰是由 0 ~ 9 这 10 个不同的数字所组成的 10 位数，而每行、每列、2 条主对角线上数字之和即幻和也是由 10 个不同的数字所组成的 10 位数。图 7-14 就是库尔欣所发明的泛数字 4 阶幻方。由图可见，幻方中的 10 位数的数字分布是很有规律的：前 2 位都是 10，其后的位顺次是 2 或 3，6 或 7，8 或 9，4 或 5，然后对称地又出现 6 或 7，2 或 3，8 或 9，4 或 5。通过巧妙的安排，使行、列、对角线上 10 数之和都相等，且和也是泛数字的 10 位数，即 4129607358，从 0 到 9 这 10 个数字都出现一次也只出现一次。库尔欣认为，他的这个 4 阶泛数字幻方是可能的泛数字幻方中阶数最小的，而其泛数字幻和（pandigital magic sum）也是可能的泛数字幻和中之最小者。

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

图 7-14　库尔欣的泛数字 4 阶幻方

我们再介绍由斯潘塞（Donald D. Spencer）开发的一个魔三角，如图 7-15 所示。这个魔三角中有三个 3 阶幻方 A、B、C 分布在正三角形的 3 条边上。它的令人叫绝之处是：

(1) C 中任一方格中的数的平方等于 A 和 B 中相应方格中数的平方之和，例如

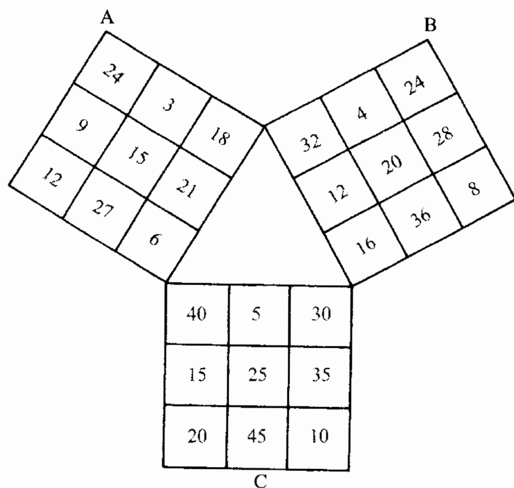


图 7-15 魔三角

$$40^2 = 24^2 + 32^2$$

（2）C 中任意 2 个或更多个方格中的数的和之平方等于 A 相应方格中数的和之平方加 B 相应方格中数的和之平方，例如

$$(40+5)^2 = (24+3)^2 + (32+4)^2$$

$$(40+20+30)^2 = (24+12+18)^2 + (32+16+24)^2$$

$$(40+15+5+25)^2 = (24+9+3+15)^2 + (32+12+4+20)^2$$

（3）由此可导出以下结论，即 C 中任意行或列或对角线（包括主对角线，折对角线，曲对角线）中数的和之平方，等于 A 中相应行或列或对角线中数的和之平方，加上 B 中相应行或列或对角线中数的和之平方。

（4）进一步可导出以下结论：C 中所有数的和之平方等于 A 中所有数的和之平方加上 B 中所有数的和之平方。

所有以上这些性质，可以用以下公式表示

$$C^2 = A^2 + B^2$$

换句话说，可以把 A、B、C 这 3 个幻方看成是由直角边 A 和 B 以及斜边 C 组成的直角三角形，满足基本关系式 $C^2 = A^2 + B^2$，你说奇妙不奇妙？值得注意的是，这 3 个幻方中用的数只从 1 到 45，其中只有

12、15、20、24 这 4 个数各被用了 2 次。

我们最后要介绍的一个魔幻方见图 7-16（a）。读者看了这个图也许会说，这不是一个用典型的连续摆数法构成的普普通通的 5 阶幻方，同图 2-1 一模一样的吗？有什么奇特之处呢？是的，这是一个5阶幻方，表面上看并无奇特之处。但是美国明尼阿波利斯城有一个名叫洛贝克（T. E. Lobeck）的有心人在仔细研究了这个幻方以后，发现这个幻方同圆周率 π 存在着密切的关系！洛贝克把5 阶幻方中的1 ~25 分别用 π 中的第1 ~25 位即3. 141592653589793238462643 代替，形成如图7-16（b）的方阵，这个方阵不但 5 纵 5 横 5 数之和都是 17、23、24、25 和 29，它的2 条对角线上数字之和 38 与 27 相加为 65，正好是 5 阶幻方的幻方常数！《物理科学和技术百科全书》（Encyclopedia of Physical Science and Technology, 3rd edition, Academic Pr., 2002）认为洛贝克的这一发现是世间惊人巧合中最令人称奇的。然而无独有偶，帕佩斯（T. Pappas）在其所著《数学的乐趣》（The Joy of Mathematics, Wide World Pub., 1989）中介绍了幻方的又一个惊人巧合：如果用斐波那契数列中的3、5、8、13、21、34、55、89、144 这 9 个数顺次代替洛书 3 阶幻方中的 1 ~9，那么所形成的3 阶方阵见图7-17（b）。这个方阵中 3 纵 3 横 3 个数的乘积之和竟然是相等的，即

$$(89\times3\times34)+(8\times21\times55)+(13\times144\times5)=26678$$

$$(89\times8\times13)+(3\times21\times144)+(34\times55\times5)=26678$$

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

（a）

2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	24	23	

（b）

图 7-16　5 阶幻方和 π 的奇妙关系

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(a)

89	3	34
8	21	55
13	144	5

(b)

图 7-17　洛书 3 阶幻方和斐波那契数的奇妙关系

幻方还有什么样的惊喜在等着我们，让我们拭目以待，更需要我们去亲自发掘！

习　　题

对百变幻方的讨论到这里就结束了。大家可以看到，关于幻方还有许许多多未解之谜有待人们去探索，而我们的介绍也只是“沧海一粟”，不可能穷尽有关幻方的无数有趣问题和有关知识。作为结束，我们给出一些有关数字阵列（包括一些变形幻方）的习题，有兴趣的读者不妨试一试去求解。

[习题 7-1] 最简单的幻立方体。

在立方体的 8 个顶点上分布 1 ~ 8，使每面 4 数之和均相等，如图 7-18。

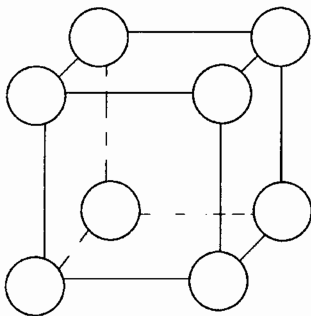


图 7-18　习题 7-1

[习题 7-2] 最简单的幻圆，如图 7-19。

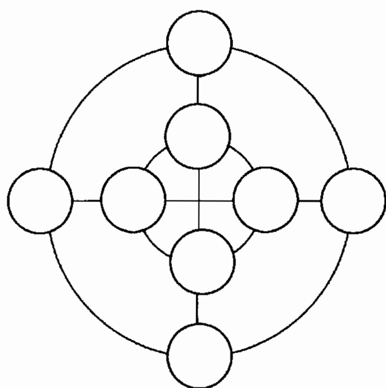


图 7-19　习题 7-2

在 8 个小圆中填入 1 ~ 8，使每线上 4 数和相等。

［习题 7-3］将 1 ~ 13 填入图 7-20 的 13 个方格中，使纵向的 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和横向的Ⅳ这几个直条上的方格中数的和均相等。

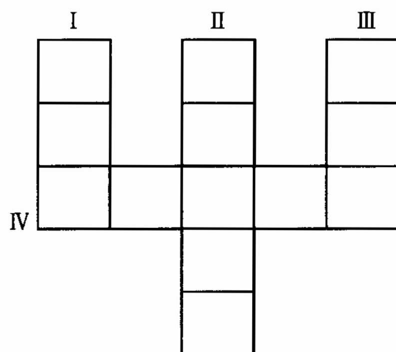


图 7-20　习题 7-3

［习题 7-4］交叉方。

将 1 ~ 16 填入 16 个小圆中，使每边 4 数和及 2 个交叉正方形 4 顶角上 4 数和均相等，如图 7-22。

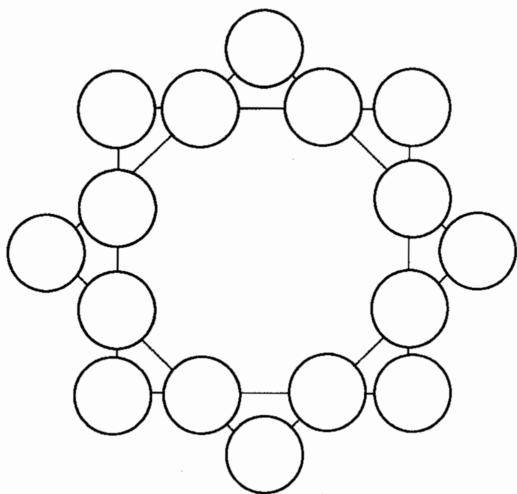


图 7-21　习题 7-4

［习题 7-5］在图 7-22 的 8 个小圆中填入 1 ~ 8，使任意 2 个有直线相连的 2 个相邻小圆中的数都不相邻（如 1 和 2，2 和 3）。

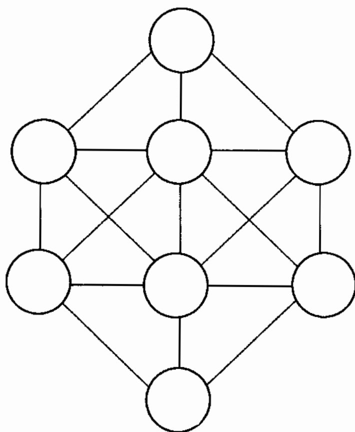


图 7-22　习题 7-5

［习题 7-6］在 1 ~ 15 中任选 12 个数填入图 7-23 的小圆中（小圆共

13 个，因此允许有 1 个数用 2 次），使任意有直线相连的 3 数之和均相等。

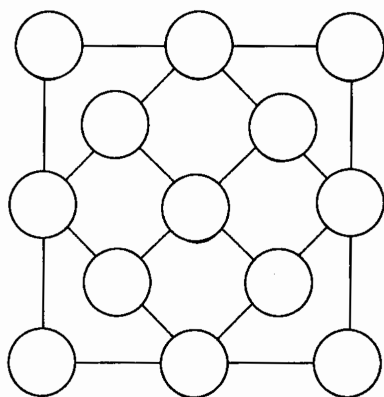


图 7-23　习题 7-6

第二部分　娱乐数学
另一经典名题——素数

在第一部分中，我们介绍了百变幻方——娱乐数学第一经典名题。第二部分，我们要向大家介绍娱乐数学的另外一个经典名题，即素数。人们对素数饶有兴味，它有着悠久的历史，许多大数学家，包括费马、高斯、欧拉、莱布尼茨……也都曾经研究过它。其中，有些问题已经解决，或者基本解决，有些问题则恐怕在相当长时间里还无望解决，如关于素数的许多猜想。

8 素数之谜

1992年3月下旬，英国原子能局哈维尔实验室的科学家骄傲地宣布，他们发现了一个新的“最大的素数”，即$2^{756839}-1$，这个素数拥有227832位，从而打破了美国休斯敦一家信息技术公司在7年前所创造的纪录，这家公司1985年所发现的“最大素数”是$2^{216091}-1$，“只有”65050位。这个消息经媒体公布以后，在世界上引起了轰动，被认为是素数研究中的一个重大突破。笔者当时曾著文加以介绍和评论，指出：“英国科学家最近发现的这个素数是20世纪最后一个年代发现的第一个这样的素数，我们相信，在进入21世纪以前，还会创造几个新记录”(见笔者发表在《知识就是力量》1992年10月号上的文章。）笔者的这一预言后来果然实现，1993年、1995年、1996年、1997年、1998年、1999年又相继发现了6个更大的素数。21世纪发现的第一个比它们更大的素数是2001年11月14日20岁的加拿大青年米哈依尔·卡梅隆所发现的$2^{13466917}-1$，是一个拥有4053946位的数，把英国科学家10年前创造的纪录又远远地抛在了后面。

有人可能感到奇怪，素数不就是自然数中除1和自身外没有其他因子的一类数吗？在计算机和软件高度发达的今天，为什么发现最大素数竟如此困难？找到一个最大素数竟成了科学上的大事？是的，素数具有许多特异的性质和现象，千百年来一直吸引着众多的数学家对它进行研究，虽然已经揭示了一些规律，但围绕着素数仍然有许多未解之谜，等待着人们去探索。

8.1 素数的无限性及其证明

关于素数的第一个问题是：素数究竟是有限的还是无限的？这个问题早就解决了。早在2300多年前，希腊数学家欧几里得（Euclid，公元前330～275）已经证明素数是无限的。他用的是反证法。假设素数是有限的，最大素数为p，那么考虑所有素数的乘积

$$P=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot p$$

现在取$P+1$，显然，这个数不可能被2，3，5，7，…，p中的任一个素数所整除。这样，$P+1$只可能有2种情况，一种情况是它本身就是素数；另一种情况是它是合数。在后一种情况下，它必然要有一个大于p的素因子，也就是说，存在着大于任意给定素数的素数。结论：素数是无限的。

当然，证明素数无限不只这一种方法。印度数学家马汉蒂（Mahanty）曾经汇集过15种之多的证明方法。

由于素数无限，因此不存在所谓“最大素数”。平常我们说“最大素数”指的是“目前已知的最大素数”。

8.2 有没有素数的一般表达式

素数研究中的一个关键问题是找出素数的一般表达式，但这个追求长期没能实现。1772年，欧拉（Leonard Euler，1707～1783）给出了一个表达素数的三项式

$$p=x^2+x+41$$

当$x=0$，1，2，…，39时，相应的40个p确实都是素数，但x超过39，p就不是素数了。考虑到$p(x-1)=p(-x)$，这个三项式实际上对$x=-40,-39,-38,\cdots,38,39$这80个连续整数都有效。

欧拉的这个著名的“素数发生器”有一个非常有趣的现象：如果我们以41为中心，按逆时针方向以螺旋方式排列41、42、43、…直到1641

成为一个 40×40 的方阵，如图 8-1，那么，欧拉公式所产生的 40 个素数绝大多数都在这个方阵的对角线上！由于篇幅关系，图 8-1 方阵中的数只到 439，但可以看到，其中一条对角线全是素数！

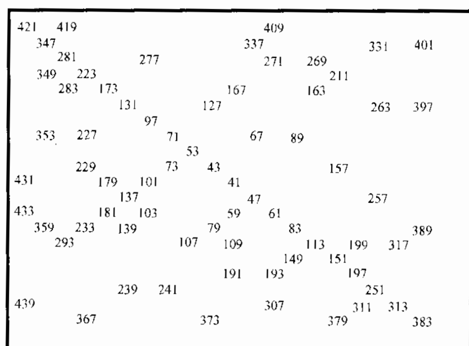


图 8-1　欧拉公式产生的素数绝大多数在方阵对角线上

其实，这一现象是所谓"乌拉姆现象"的一个特殊形式。1963 年秋季，美国洛斯·阿拉莫斯科学实验室的数学家乌拉姆（Stanislaw M. Ulam，1909～1984）在参加一个学术会议时，因为报告既冗长又缺乏新意，丝毫引不起他的兴趣，为了消磨时间，他就在笔记本上随手画了一个坐标轴，把 1 放在中心，把 2、3、4、…顺序按逆时针方向以螺旋方式一层一层地分布在 1 的周围，然后把素数圈了出来。结果使他十分惊奇，这些带圈的素数都集中在一些斜线上，如图 8-2。这就是著名的素数分布的乌拉姆现象。乌拉姆后来还和他的同事斯坦因（Myron L. Stein）和韦尔斯（Mark B. Wells）一起，对 1～10000 以及更大的 1～65000 范围内的素数分布，通过计算机屏幕进行显示和研究，分别见图 8-3（a）（b），仍然可以看出，在一定程度上，素数有集中在一些直线上的倾向。除欧拉公式外，还陆续发现了其他一些能产生部分素数的公式。例如

$$p=6x^2+6x+31$$

当 $x=0, 1, 2, \cdots, 28$ 时，p 给出 29 个素数。

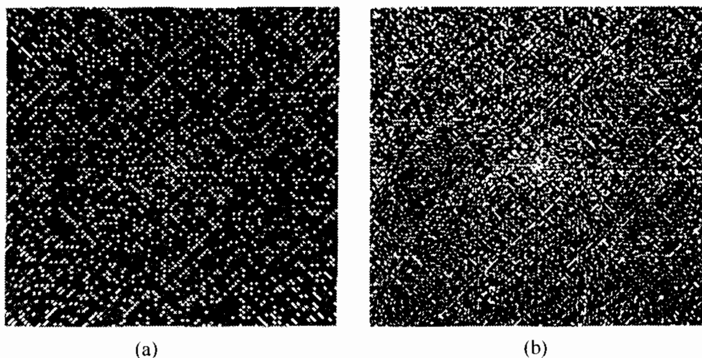
$$p=2x^2+29$$

当 $x=-28, -27, \cdots, 27, 28$ 时，p 都给出素数。但最好的是下列公式

$$p=x^2-79x+1601$$

100	99	98	(97)	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	(61)	60	(59)	58	57	90
66	(37)	36	35	34	33	32	(31)	56	(89)
(67)	38	(17)	16	15	14	(13)	30	55	88
68	39	18	(5)	4	(3)	12	(29)	54	87
69	40	(19)	6	1	(2)	(11)	28	(53)	86
70	(41)	20	(7)	8	9	10	27	52	85
(71)	42	21	22	(23)	24	25	26	51	84
72	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50	(83)
(73)	74	75	76	77	78	(79)	80	81	82

图 8-2　素数分布的乌拉姆现象



(a)　　(b)

图 8-3　更大范围内素数的分布（a）1～10000（b）1～65000

当 $x=0$，1，2，…，78，79 时，它给出 80 个素数。能与之匹敌的是以下式子

$$p=x^2-2999x+2248541$$

当 $x=1460,1461,\cdots,1539$ 时，它也可以给出 80 个素数。

在寻求素数公式的努力中，法国 17 世纪的著名数学家费马（Pierre

De Fermat，1601～1665）犯了一个“历史性”的错误。他在1640年10月宣布了一个素数公式

$$F=2^{2^n}+1$$

这个公式被称为“二乘方定理”(theorem of binary powers)，在将近一个世纪的时间里，没有人对它提出疑问，认为对任意正整数 n，产生的都是素数（也许这是因为费马的名气太大了，因此没有人敢对他提出的命题表示怀疑）。直到1732年，欧拉首先发现这个公式有问题。对于 $n=0$，1，2，3，4，这个公式是正确的，因为

$$F(0)=3$$

$$F(1)=5$$

$$F(2)=17$$

$$F(3)=257$$

$$F(4)=65537$$

确实都是素数。但 $n=5$ 时，结果却是合数而不是素数

$$F(5)=4294967297=641\times6700417$$

又过了100多年，即1880年，时年82高龄的兰德里（F. Landry）才又把欧拉的发现推进了“一步”，他发现费马公式在 $n=6$ 的情况下也是错误的，因为 $F(6)$ 至少可分解为274177和67280421310721之积。

1905年，莫尔黑德（J. C. Morehead）和韦斯顿（A. E. Western）各自独立地证明了 $F(7)$ 也不是素数。但是他们都无法给出 $F(7)$ 的因子。$F(7)$ 的因式分解直到1971年才由加州大学洛杉矶分校的勃利尔哈特(John Brillhart）和莫里森（Michael Morrison）借助计算机完成

$$F(7)=2^{2^7}+1=2^{128}+1=59649589127497217\times5704689200685129054721$$

1909年，莫尔黑德和韦斯顿合作，又证明了 $F(8)$ 不是素数。但是他们仍然无法给出 $F(8)$ 的因子。$F(8)$ 的因式分解迟至1981年才由勃兰特（R. P. Brent）和普拉特（J. M. Pollard）实现，当然也是借助于计算机。

随后，数学家们又陆续证明了对更大的 n，$F(n)$ 也大多不是素数，并成功地找到了相应的因子。我们这里就不再一一列举了，有兴趣的读者可参阅加拿大皇后大学(Queen's University) 的数学家利本鲍姆 (Paulo Ribenboim)有关素数的一本出色专著《The New Book of Prime Number Records》(Springer，1996)。根据该书的介绍，在较小的 n 中，只有 $n=24$ 和 $n=28$ 其费马数到底是素数还是合数尚未得到证明；而已经证明为合数的费马数的最大 n 为 23471，该费马数有一个因子为 $5\times2^{23473}+1$，是凯勒 (W. Keller) 于 1984 年发现的。

8.3 表达素数的函数

虽然费马的探索以失败而告终，但数学家们寻求用函数来表达素数的努力并未放弃。1947 年，米尔斯 (W. H. Mills) 证明存在这样的实数 θ，使得对每个自然数 $n\geqslant1$

$$f(n)=[\theta^{3^n}]$$

都是素数。可惜米尔斯只证明了 θ 的存在，并指出 θ 大约等于 1.3064…，但 θ 的精确值却无法给出。

1963 年，布雷迪欣 (B. M. Bredihin) 证明下列函数对无限多的 (x, y) 整数对产生的都是素数

$$f(x,y)=x^2+y^2+1$$

布雷迪欣的证明虽然没有错，但是很明显，x，y 中只要一个取偶数，另一个取奇数，其结果必为偶数（因为奇数^2＋偶数^2＋1 必为偶数)，因此必不为素数，所以也不能作为素数的一般表达式。

1976 年，滑铁卢大学教授罗斯 · 杭斯伯格 (Ross Honsberger) 基于著名的威尔逊定理（见下)，在其所著的《数学珍宝》(Mathematical Gems, Ⅱ) 一书（由美国数学会出版）中建立了如下函数

$$f(x,y)=\frac{y-1}{2}[\,|B^2-1|-(B^2-1)\,]+2$$

其中 $B = x(y+1) - (y!+1)$，x、y 是自然数，! 是阶乘符号（即 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$）。杭斯伯格宣布并给出了证明，这个式子只产生素数，能产生每一个素数，而且除偶素数 2 以外，每个奇素数恰好只产生一次。例如：

当 $x=1$，$y=2$，则 $f(1,2)=3$；

当 $x=3$，$y=4$，则 $f(3,4)=2$；

当 $x=5$，$y=4$，则 $f(5,4)=5$。

对杭斯伯格的这一宣布，世界各国的数学界都十分重视。我国的《数学译林》杂志 1984 年第 3 期曾译载了有关章节，有些数学专著中也曾予以介绍。但值得注意的是，前面提到的出版于 1996 年的有关素数研究的专著《The New Book of Prime Number Records》，虽然把《数学珍宝》一书列入参考书目，却只字未提杭斯伯格的这一“素数的统一公式”，这是耐人寻味的。因此，看来我们还不能乐观地认为这个问题已经最终得到解决。

8.4 怎样判定大素数

素数研究的另一个方向是对于给定的数 N，不必检查每个小于 $\sqrt{N}$ 的素数是否是其因子就能判定其是素数还是合数。在这个问题上，费马在 1640 年给出了一个正确的命题：如果 p 是素数，而 a 是不能被 p 整除的，那么 $a^{p-1}-1$ 必能被 p 整除。根据这个命题，对给定的 N 要验证其是否是素数，只要找一个不能被 N 整除的 a 再看 $a^{N-1}-1$ 是否能被 N 整除就可以了。费马的这个命题后来被称为“费马小定理”，由欧拉在 1736 年给出了严格的数学证明。

有趣的是，对于费马小定理在 $a=2$ 时的情况，我们的祖先在公元前 500 年就已经知道了。有人因此认为，费马正是受了中国人的启发而提出这一命题的。这说明我们的祖先在数学上曾达到很高的水平，取得了卓越的成果。但我们的祖先同时也犯了一个错误，他们认为这个命题

的逆命题也是正确的，即如果 N 可以整除 $2^{N-1}-1$，则 N 为素数。对此，德国大数学家戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646～1716）在 1680 年曾为中国人赞叹不已，并给予“证明”。不幸的是，我们先人的这个论断是错误的，莱布尼茨的“证明”也是错误的。因为后来（这是 1819 年的事）发现，例如 341 这个数可以整除 $2^{340}-1$，但 $341=11\times31$，并非素数！由于这个缘故，数学上把可以整除 $2^{N-1}-1$ 的 N 叫做“伪素数”（pseudoprime number）。

1770 年，威尔逊（J. Wilson）提出了一个判据：当且仅当 $(N-1)!+1$ 能被 N 整除时，N 是素数。对这个判据，法国数学家拉格朗日（Joseph Louis Lagrange，1736～1813）在 1773 年证明它是正确的，因此被称为威尔逊定理。可惜，检查 $(N-1)!+1$ 能否被 N 整除丝毫也不比用常规的办法检查 N 是否是素数要容易些。因此威尔逊定理只有理论上的意义而没有实用价值。目前常用的检查素数的法则是基于上述费马小定理的逆定理，这是由另一个数学家卢卡斯（E. Lucas，1842～1891）给出的，即如果 a^x-1 在 $x=N-1$ 时能被 N 整除，而在 x 为 $N-1$ 的正因子时又不能被 N 整除，则 N 为素数。

8.5 某范围内素数知多少

在某个范围内的素数有多少个？这是数学家们研究的另一个问题。有了上述费马和卢卡斯的定理以后，人们当然可以通过逐一检查各自然数是否是素数，或者，用古希腊数学家幼拉脱斯芬（Eratosthenes，约公元前 276～194）早就发现的筛选法，做出素数表来回答这个问题。

例如，加利福尼亚州蒙特雷市的斯伏洛夫（Kenneth P. Swallow）用以下巧妙办法借助于幼拉脱斯芬筛去获得 100 以内的素数：如图8-4，他把 1～100 放入 1 个 6×17 的矩阵，然后：①勾掉2、4、6列中的全部数，也就是 2 的倍数，但 2 本身除外；②勾掉 3 列中的所有数，也就是 3 的倍数，但 3 本身除外；③通过 4 条左斜线勾掉所有 5 的倍数，但 5

本身除外；④类似地，用3条右斜线勾掉所有7的倍数，但7本身除外；⑤把1勾掉。

这样，100以内的素数就筛出来了，一共是25个。斯伏洛夫这个办法的优点是从这个矩阵立刻可以看出，除2和3以外的所有素数要么是6的倍数减1（$6n-1$），要么是6的倍数加1（$6n+1$），因为除2和3以外，所有素数都在第1列和第5列。由此也可以明白，素数表中为什么有一批孪生素数对。此外，斯伏洛夫的矩阵还带来了一个有趣的对比：同乌拉姆现象中素数集中在方阵中的一些直线上正相反，在这个矩阵中是合数集中在一些直线上了。下面我们回到素数表的制作上来。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

图 8-4 幼拉脱斯芬筛

历史上，1659年，拉恩（J. H. Rahn）做出了24000以内的素数表，这是世界上第一个比较完整的素数表。1668年，佩尔（J. Pell）把它扩充到100000。1776年，维也纳的数学家费尔克尔（Felkel）造出了408000以内的素数表。19世纪的数学家彻内克（Chernac）等共同造出了10卷的素数表，直到10000000。捷克布拉格大学的库利克（J. P. Kulik）积20年的努力，造出了100000000以内的素数表，可惜没有出版。目前被广泛应用的素数表是美国数学家莱默（D. N. Lehmer，1867～1938）在1909年完成的，其中给出了10000000以内的素数共计664580个。

有“数学王子”之称的德国大数学家高斯（Karl Friedrich Gauss，1777～1855）在15岁时就发现，如果用A_n表示小于正整数n的素数的数目，那么有下列关系

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n \lg_e n}{n}=1$$

换句话说，在前 n 个正整数中素数的密度可近似表示为

$$\frac{A_n}{n} \doteq \frac{1}{\lg_e n}$$

这个公式被称为“素数定理”（Prime number theorem）。对于 $n=10^3$，10^6，10^9，实际 A_n 及利用高斯公式求得的近似$A_n \doteq \frac{n}{\lg_e n}$及其误差见表 8-1。

表 8-1

n	A_n	$n/\lg_e n$	误差%
10^3	168	145	13.7
10^6	78496	72382	7.8
10^9	50847478	48254942	5.1

由此可见，随着 n 的增大，利用高斯公式算出的素数个数同实际素数个数之间的误差愈小。

如果要求的不是从 1 开始的某个范围内的素数个数，而是从某个特定的自然数 X 开始的某个范围 x 内的素数个数，那将如何求呢？1870 年，迈泽尔（Meissel）发现，要是 X 很大，而 x 相对而言较小，则在 X 和 $X+x$ 之间（或 $X-x$ 和 X 之间）的素数个数近似为$\frac{x}{\lg X}$，其形式和高斯公式十分相似，精确度也相当不错。例如，在 10000000 和 10005000 之间，按近似公式算出的素数个数为 310 个，素数表中的实际素数个数为 305 个，误差不到 1.7%。

关于素数个数问题，数学家伯特兰（Bertrand）曾经猜测，在任意 x 和 $2x$ 之间至少存在一个素数。这个猜想由俄国数学家契比雪夫于 1848 年给出了证明。而另一个猜想：在任意 x^2 和 $(x+1)^2$ 之间总存在素数，则至今未能获得证明。

8.6 梅森素数——最大素数的表示形式

现在我们回到本文开头所说的最大素数。目前已知的最大素数现在

都采用 2^p-1 的形式，这种形式的素数叫梅森素数（Mersenne prime）。这是怎么回事呢？原来人们很早就发现，2^p-1形式的数如果是素数，那么其中的 p 一定是素数，因为 $2^{ab}-1$ 是可以被 2^a-1 和 2^b-1 所除尽的（但其逆命题不成立，即如果 p 是素数，2^p-1 并不一定是素数）。这就给了人们一个从已知的小的素数出发，获得未知的极大素数的"简便"方法。我们这里把简便 2 个字打了引号，为什么呢？因为从方法上讲，这确实是最简便不过了，把已知的小素数 2，3，5，7，11，…逐一代入 2^p-1 中去，再检验它是否是素数，不就行了吗？实际上，随着 p 的增大，2^p-1 迅速增大，检验它是否是素数不但并不简便，而是困难重重。比费马稍大一些的法国数学家梅森（Marin Mersenne，1588 ~ 1648）一生中用了很大精力寻求 2^p-1 这种形式的素数，在他去世前 4 年即 1644 年公布了他这方面的全部研究成果，他检验过的 p 只到 257，而能成为素数的 2^p-1 只有 12 个，即 $p=1$，2，3，5，7，13，17，19，31，67，127，257。这在当时的数学界成为一件大事，并因而把 2^p-1 这种形式的素数叫做梅森素数。

然而，后来陆续发现，梅森的这个研究成果中竟然还包含着 5 个错误：

（1）1886 年珀沃辛（Pervusin）和西哈夫（Seehalf）发现梅森的序列中漏掉了 61；换句话说，$2^{61}-1$ 是素数，但梅森没有发现。这已是梅森身后 200 多年了。

（2）1903 年科尔（Cole）发现序列中的 67 是错误的，即 $2^{67}-1$ 不是素数，而梅森把它当成了素数。

（3）1911 年鲍威尔（R. E. Power）发现序列中还应该包括 89，即 $2^{89}-1$ 也是素数，梅森没有发现。

（4）1914 年鲍威尔又挖掘出一个新的 $p=107$。

（5）1922 年克赖契克（M. Kraitchik）发现序列中的最后一个 $p=257$ 也是错的，即 $2^{257}-1$ 是一个合数，梅森误把它当作了素数。

由此可见，随着 p 的增大，2^p-1 迅速增大，判定它是素数还是合

数何等困难。但由于舍此没有其他更好的办法来求极大的素数，所以几百年来人们只能通过求梅森素数来求最大素数。但即使在计算机出现以后，由于计算机在处理与计算极大的整数上仍然存在着困难，因此，进展仍然不快。在计算机出现以前，通过手工计算确认的梅森素数只有12个，即 $p=2$，3，5，7，13，17，19，31，61，89，107，127。用计算机寻找梅森素数的第一个成果是鲁滨逊（R. M. Robinson）于1952年获得的，他在美国标准局所研制的所谓“西部机”SWAC上一下找到了5个梅森素数，把梅森的序列一下推进到521，607，1279，2203，2281，成为当时的轰动新闻，同时也使人们首次认识到了计算机在科学发现中的巨大潜力。

而后，在计算机的帮助下，1957年由汉斯·利塞尔（Hans Riesel）发现了第18个梅森素数 $p=3217$；1961年由阿历克山大·霍尔维茨发现了第19和20个梅森素数，$p=4253$ 和 $p=4423$；1963年由吉利斯（Donald B. Gillies）发现了第21、22、23个梅森素数，p 分别为9689，9941和11213；1971年由图克曼（Bryant Tuckerman）找到了第24个梅森素数，它的 p 已经达到19937，是一个有6002位的数。由于 p 的增长，计算机在验证这么大的数是否是素数上也面临困境，因此发掘最大素数出现暂时停顿。好在20世纪70年代中期出现了巨型机，计算能力迅速增长，为寻找最大素数增添了动力。1978年，2个18岁的高中生兰登·诺尔（Landon Curt Noll）和劳拉·尼克尔（Laura Nickel）利用加州大学海沃德分校的Cyber174计算机，经过350个小时的计算，找到了第25个梅森素数，$p=21703$，开创了用巨型机加速寻找梅森素数的新时代。第二年，诺尔单独发现了第26个梅森素数，$p=23209$；同年，尼尔森（H. Nelson）和斯洛文斯基（David Slowinski）在Cray-Ⅰ上发现了第27个梅森素数，$p=44497$；这个梅森素数有13395位，在Cray上打印出来其前半部分，如图8-5所示，真是“洋洋大观”，令人叹为观止。其后，斯洛文斯基单独或与人合作，于1982年、1983年、1985年、1992年、1993年、1995年先后发现了第28、30、31、32、33、34个梅森素数，p 分别为86243、

THE 27TH MERSENNE PRIME

The 27th Mersenne prime. It has 13395 digits and equals $2^{44497}-1$.

[illegible]

图 8-5 第 27 个梅森素数局部

132049、216091、756839、859433、1257787，但是斯洛文斯基漏掉了第29个梅森素数，这个梅森素数的 $p=110503$，是1988年由考尔奎特（W. N. Colquitt）和小威尔士（L. Welsh, Jr.）发现的。

1993年9月，当时的美国克林顿政府推出了影响深远的建设“国家信息基础设施”的所谓NII计划（The National Information Infrastructure: Agenda for Action），在美国和全球掀起了信息高速公路热，国际互联网及其应用从此飞速发展。在这一背景下，近20年来只有通过巨型机发现梅森素数的状况出现了变化。1996年，居住在美国佛罗里达州奥兰多（Orlando, Florida）的一个名叫乔治·沃特曼（George Woltman）的退休计算机程序员创建了一个网民志愿者组织，名为GIMPS，所谓GIMPS是Global Internet Mersenne Prime Search，就是“全球因特网梅森素数大搜索”。这个组织在网上建立了一个网站，上面放有沃特曼教授开发的寻找梅森素数的程序。这个程序设计得非常精巧。首先是在检查素数方面，采用了最先进的算法，包括经沃特曼教授改进的快速傅里叶变换FFT等，而且一经证实 2^p-1 不是个新的素数，它会给出其素因子。其次，他们这个程序是开放的，任何网民经过登记都可以下载其程序在自己的计算机上运行，对网站统一分配给他的一段 p 逐一检查是否有 2^p-1 为素数。程序的运行是极其自由的，主人在机器上需要做别的事时，可以随时中断，空闲时又可以随时恢复。这样，GIMPS就组织起了无数的数学爱好者，动员网上的几万、几十万台计算机联合起来，共同协作，投入寻找新的梅森素数的伟大行动。实际上，GIMPS就是巧妙地利用散布在世界各地的计算机（其中主要是个人计算机）的过去被闲置不用的计算能力，积少成多，去完成过去由巨型机才能承担的计算任务，以发现新的梅森素数。GIMPS建立至今，只有短短10余年时间，但是已经取得了巨大的成功。GIMPS建立的当年1996年年底，11月13日，当时的700多名志愿者之一乔尔·阿曼高德（Joel Armengaud），巴黎Apsylog公司一名29岁的程序员，利用他的只有90MHz的奔腾PC机，在经过88个小时的运算后，找到了第35个梅森素数，$p=$

1398269，这个梅森素数有420921位，打印出来有225页之多。

阿曼高德的成功使GIMPS名声大振，参与这一行动的网民迅速增加。到1997年8月，GIMPS的成员增至2000多。8月24日，从英国南安普敦传来了好消息：当地一家名为Thorn的微波器件公司的信息技术主管、38岁的高登·斯潘塞（Gordon Spence）找到了第36个梅森素数，$p=2976221$。斯潘塞用的计算机是100MHz的奔腾机，找到这个梅森素数花了15天。

问世才1年多的GIMPS就找到了2个梅森素数，这一非凡的成绩使沃特曼信心倍增。为了使GIMPS更好地运作，他把他的网站移到了一个名为"Entropia，Inc."的网络公司的服务器上，这个公司是由斯各脱·库洛夫斯基（Scott Kurows-ki）当年刚刚在加利福尼亚州圣地亚哥创办的，其宗旨是利用因特网的巨大计算机资源从事高科技的产品研究与开发，诸如抗艾滋病药品的研制，新材料开发，市场的防风险和安全机制等。沃特曼把寻找梅森素数的程序放到Entropia的服务器上以后，库洛夫斯基为之完善与改进了对GIMPS成员的网上管理与监督，形成了一个叫PrimeNet的系统，使GIMPS的运作更为有效与严密。沃特曼与库洛夫斯基的合作很快见到了效果：1998年1月27日，第37个梅森素数被加州州立大学一名19岁的大学生罗兰·克拉克森（Roland Clark-son）发现。这个梅森素数的$p=3021377$，有909526位。克拉克森是当时4000名GIMPS志愿者中的幸运儿，他用一台200MHz的奔腾机在空闲时间断断续续地运行沃特曼的程序，经过46个日日夜夜，屏幕上突然出现了一行文字："你找到了一个新的梅森素数！"从而使他成为历史上仅次于诺尔和尼克尔的发现梅森素数的第3位最年轻的人。

接着，在1999年6月1日，受雇于密歇根州普利茅斯（Plymouth，Michigan）的Price Waterhouse Coopers公司的印度裔人纳扬·哈拉特华拉（Nayan Hajratwala）找到了第38个梅森素数，$p=6972593$，位数首次超过100万位，达到2098960位。哈拉特华拉用的是一台350MHz的奔腾Ⅱ IBM Aptiva个人计算机，找到这个素数花了他111天，但机器实

际运行沃特曼程序的机时累加起来约 21 天。当时 GIMPS 已拥有 12600 名成员，而 PrimeNet 协调的计算机达 21500 台。为此，哈拉特华拉幸运地获得了由美国电子前沿基金会 EFF（Electronic Frontier Foundation）的 5 万美元奖金，成为历史上第一位因发现最大素数而获奖的人。

GIMPS 随后发现的一个更大梅森素数为 $p=13466917$，这个素数有 4053946 位，这是人类在 21 世纪发现的第 1 个梅森素数，全部梅森素数中的第 39 个，是 2001 年 11 月 14 日由米哈伊尔·卡梅隆（Michael Cameron）发现的。卡梅隆是一名 20 岁的加拿大青年，居住在安大略省的欧文·桑德镇（Owen Sound），白天上学，晚上接受一家名为 Nucomm International, Inc. 的通信公司的培训准备就业。他用一台 800MHz 的 AMD T-Bird 个人电脑在闲暇时间参与梅森素数网上大寻找，结果在第 45 天喜获硕果，成为当时 13 万志愿者中的幸运儿，而 Entropia 公司经过近 4 年的发展，参与该公司的网上研发计划（包括搜寻梅森素数行动）的计算机已超过 205000 台，形成了目前呼声很高 、极具发展前途的所谓“网格计算”（Grid Computing）能力。IT 的业界巨头 IBM 公司十分重视异军突起的 Entropia 公司，在卡梅隆发现第 39 个梅森素数前几天刚刚宣布同 Entropia 建立合作伙伴关系。因此，新千年第 1 年的年底对于 Entropia 公司来说可谓双喜临门。目前，这个公司不但在其发祥地圣地亚哥，还在英国的剑桥设有办事处。

此后，美国人和德国人又相继在 2003 年、2004 年、2005 年和 2006 年发现了更大的梅森素数，其 p 分别为 20996011、24036583、25964951、30402457 和 32582657，位数分别达到 6320430、7235733、7816230、9152052 和 9808358 位。GIMPS 的丰硕成果充分说明了互联网的威力，也反映了互联网时代科学发现的国际性。根据 2008 年初最新的统计资料，我国上网人数已激增至 2.1 亿人，在世界上仅次于美国而居第 2 位。笔者希望在我国的网民中，尤其是在青少年网民中，有更多的人参与到 GIMPS 搜寻梅森素数的活动中去，有朝一日将有中国人发现更大的梅森素数。对此感兴趣的读者可在下列网站下载搜寻梅森素数

的程序：

http：//www. mersenne. org/prime. htm。

对 Entropia 公司及其研发活动感兴趣的读者则可访问下列网站：

http：//www. entropia. com；

http：//www. fightaidsathome. org；

http：//www. safermarkets. org。

8.7 最大素数有多大

2006 年 9 月发现的目前已知的最大素数 $2^{32582657}-1$ 是一个有 9808358 位的数。就这个数本身而言，要把它的 9808300 多位数字印刷出来的话，大约是厚厚的上千页的两本书。这个数所代表的数量有多大呢？我们假定全世界有 100 万个图书馆，每个图书馆藏书 100 万册，每册书包含 100 万个印刷符号，那么全部这些藏书的印刷符号的总数仅仅是一个 19 位的数。对比之下，最大素数是比 980 万位还要多的一个数，这个数表示的数量有多大，读者大概会有一个大体的概念而瞠目结舌了。数学家德夫林（K. Devlin）在其名著 Mathematics：The New Golden Age一书（该书已有中译本，书名《数学：新的黄金时代》，李文林等译，上海教育出版社 1997 年出版）中，对 2 的方次表示的数的大小用了以下比喻：对 $2^0=1$，用 1 个 2mm 厚的英国便士表示，$2^1=2$，用 2 便士表示，$2^2=4$，用 4 便士表示……那么，对 2^{64}，表示其大小的便士摞起来有多高呢？它将越过月亮（离地球 400000 公里），再越过太阳（离地球 1.5 亿公里），直达除太阳外离地球最近的另一颗恒星——半人马座中的 α 星，它离地球有 4 光年之遥！注意，这还只是 2^{64}，而目前已知的最大素数是 $2^{32582657}-1$！笔者不懂天文学，不知道用便士来表示它的大小时，该到达哪颗恒星了，总之是宇宙深处了吧！

作为这一章的结束，我们介绍有关素数的一个有趣的问题，这个问题是美国密西西比州的史密斯（Burris Smith）提出来的，刊载于 1964

年3月的《科学美国人》上。设有如图8-6所示2个互相啮合的齿轮，齿轮上各画了一条带箭头的直线。开始时，2个箭头正好相对。然后小轮顺时针方向转动。若大轮有181个齿，问小轮在转了多少圈以后这2个箭头又重新相遇？

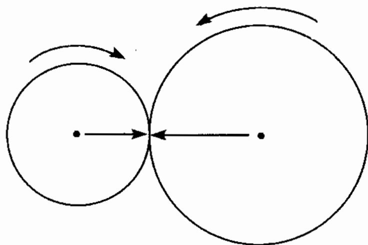


图8-6 一个与素数相关的有趣问题

可能有读者会说，这个题目里没有给出小轮的齿数，无法计算其传动比，怎么回答这个问题啊！其实这个题目的有趣之处正在于答案是跟小轮齿数无关的，你可以任意假设它有多少个齿，比如说有 n 个齿。根据题意，设2个箭头重新相遇时，2个齿轮都转过了 k 个齿，则 k 应该是2个齿轮齿数的最小公倍数（LCM）。由于大轮齿数181是个素数，LCM只能是两轮齿数的乘积 $181n$。由此可知，不管小轮齿数是多少，它要转181圈才能使2个箭头重新相遇。

9 素数奇趣

在第 8 章“素数之谜”中，我们介绍了素数研究中的一些主要问题，是偏重于学术的。这一章我们介绍有关素数的一些奇异的现象和有趣的问题。

9.1 由顺（逆）序数字组成的素数

从整体来看，素数是一种无序的数，其中出现的数字是随机的，杂乱的，没有规律的。但是也有少数素数，恰恰是由1 ~9这 9 个数字或其一部分的顺序或逆序排列形成的，从而引起人们的兴趣与注意。数字以升序排列的素数有

23，67，89，4567，…，23456789，1234567891，…

1972 年，Bowling Green 大学的拉斐尔·芬克尔斯坦（Raphael Finkelstein）等人发现了一个 28 位的顺序数字素数：

1234567891234567891234567891

1978 年，艾伦·凯塞尔（Alan Cassel）打破了这个记录，发现了一个由 123456789 重复达 9 次、最后以 1234567 结尾的顺序数字素数

$$\underbrace{123456789}\underbrace{123456789}\cdots1234567$$

这个素数长达 70 位，这个记录至今无人能够打破。

相比之下，数字以逆序排列形成的素数则很少发现，已知的只有 43，76543 等少数几个，而 76543 已经是这类素数中的“老大”了。

同一个数字重复若干次能否形成素数？显然这只有 1 是可能的，其他数字都是不可能的（为什么?）。除了 11 以外人们也确实发现了由多

个1组成的素数，如：

1111111111111111111　　11111111111111111111111

前者由19个1组成，后者由23个1组成。显然，这样的素数中1的个数必然是素数。

2个不同的数字重复出现也能形成一些奇妙而独特的素数。下面这2个是其中的“佼佼者”

909090909090909090909090909091

909090909090909090909090909090909090909091

前一个是90重复了14次，最后以91收尾；后一个是90重复了19次，最后以91收尾。

9.2 回文素数

所谓回文素数是正读和反读是同一个素数的素数。前面介绍的重复1素数显然也是回文素数。除了上述2个1，19个1，23个1所组成的素数外，1977年，威廉姆斯（Hugh C. Williams）发现了一个由317个1所形成的重复1素数，是最大的回文素数。后来他又发现了一个由1031个1所组成的数也是素数。

回文素数不算很多，在1000以内只有下列16个：

11，101，131，151，181，191，313，353，373，383，727，757，787，797，919，929。

1980年11月，滑铁卢大学用PDP 11/45计算机找出5位的回文素数共93个，7位的回文素数共668个。比利时著名的娱乐数学杂志《Crux Mathematicorum》的编辑利奥·索维（Leo Sauve）则给出了9位的回文素数共5172个，其中最奇特的一个是345676543。而包含全部0~9这10个数字的最小回文素数1023456987896543201则是哈里·尼尔逊（Harry I. Nilson）在1980年发现的。

加拿大数学家格里奇曼（N. Gridgeman）注意到在回文素数中有这

样一个奇异的现象，即在奇数位的回文素数中常常出现仅中央数字差1，而两侧数字都相同的素数对，他把这样的素数对叫做回文素数对。例如，在最前面的47个回文素数中，就有近一半即22个组成回文素数对

(181,191)　(373,383)　(787,797)　(919,929)

(10501,10601)　(11311,11411)　(12721,12821)

(13831,13931)　(15451,15551)　(16561,16661)

(30103,30203)

数学家已经证明，回文素数的数量是无限的；格里奇曼猜测，回文素数对的数量也是无限的，但至今不能证明。目前已知的最大的回文素数对如下

$$\left(\underbrace{11\cdots1}_{45\text{ 个 }1}4\underbrace{1\cdots1}_{45\text{ 个 }1},\ \underbrace{1\cdots1}_{45\text{ 个 }1}5\underbrace{1\cdots1}_{45\text{ 个 }1}\right)$$

在寻找极大的回文素数方面，数学家杜勃讷（H. Dubner）一直保持着创记录的成绩。下面这些奇特的大回文素数都是他发现的：

（1）1989年，杜勃讷发现了由数字2居中、两侧分布各2894个9的这样一个奇特回文素数，表示为 $(9)_{2894}2\,(9)_{2894}$，这个回文素数有5749位。

顺便说一下，杜勃讷2000年还发现了一个开头是8，其后全是9的极大素数：$8(9)_{48051}$，这个素数有48052位。但他的这一记录后来被索伦森（E. J. Sorenson）打破。索伦森所发现的这类素数有

打头数字	后随9个数	发现年份
4	21456	2001
5	34936	2001
2	49314	2002
7	49808	2002
1	55347	2002

显然，其开头数字必不能被3整除。

（2）1989 年，杜勃讷发现了一个仅由 0 和 1 组成的大回文素数

$$1(0)_{2415}(1)_9(0)_{2415}1$$

这个素数有 4841 位。10 年后，杜勃讷发现了一个更大的、有 30803 位的这样的回文素数

$$1(0)_{15397}1110111(0)_{15397}1$$

（3）“三重回文素数” $10^{11310}+4661664\times10^{5652}+1$。

这个回文素数实际上是4661664 居中，前后各有 5652 个 0，首尾为 1，所以共有 11311 位。之所以称它为三重回文素数（triply palindromic prime），是因为它的位数 11311 也是一个回文素数，11311 的位数 5 也可以看成是回文素数。后来杜勃讷又发现了一个更大的三重回文素数，有 35353 位

$$10^{35352}+2049402\times10^{17673}+1$$

（4）杜勃讷发现的最大回文素数是

$$10^{39026}+4538354\times10^{19510}+1$$

这个素数有 39027 位，是 2001 年发现的。杜勃讷保持这个世界记录到 2003 年，这一年，郝艾尔（D. Heuer）利用一个叫 Prime Form 的程序找到了第一个突破 10 万位的回文素数

$$10^{104281}-10^{52140}-1$$

这个回文素数有 104281 位。

这里，我们还顺便介绍杜勃讷发现的两个非常奇特的素数。

（1）素数中只包括数字 2、3、5、7——这几个数字本身也都是素数！如下

$$72323252323272325252\times\frac{10^{3120}-1}{10^{20}-1}+1$$

$$=(72323252323272325252)_{156}+1$$

这个素数有 3120 位，是杜勃讷 1992 年发现的。除了其中只有素数以外，它还有另外两个奇特之处：一是整个素数由 72323252323272325252 重复 155 次，最后再重复一次时以 53 收尾；二

是素数中总是先出现一个奇素数（3、5 或 7），后面紧跟着一个偶素数 2，只有末尾 2 位除外。

（2）包括从 0 到 9 的全部数字的素数

$(1)_{1000}(2)_{1000}(3)_{1000}(4)_{1000}(5)_{1000}(6)_{1000}(7)_{1000}(8)_{1000}(9)_{1000}(0)_{6645}1$

这个素数是杜勃讷 2000 年发现的，共 15646 位，它顺序出现 1000 个 1，1000 个 2，1000 个 3，…，1000 个 9，最后是 6645 个 0，然后以 1 收尾。

9.3 可逆素数

所谓可逆素数（reversible prime）是正读为素数，反读也是素数。显然，上面讨论的回文素数也是一类可逆素数，但正读、反读都一样而已。

最前面的几个可逆素数是 13，17，31，37，71，73，79，97，107，…;稍后有 1453，1559，1583，…；更大的有 987653201 等。

最早对可逆素数进行研究的是法雷尔（Jaremiah P. Farrell）。后来，卡德（Leslie E. Card）把可逆素数称为“埃米尔素数”（emirp）。埃米尔是穆斯林国家的酋长或王公贵族。卡德之所以把可逆素数叫做埃米尔素数，笔者猜测大约有 2 层意思：一是这类素数很珍贵稀少；二是首先研究这个问题的法雷尔大概是一个穆斯林（从他的名字看是这样，但笔者未查到法雷尔的资料）。

可逆素数确实比较稀少。2 位素数中只有 4 对，3 位素数中有 14 对，4 位素数中有 102 对。卡德曾经给出了 10^7 以内的所有可逆素数。

在可逆素数中，又有两类很特殊的。一是素数中没有重复数字，这叫“no-rep emirp”。这类可逆素数当然只限于 10 位以内，因为超过 10 位的至少有 2 个相同数字。并且，0～9 的 10 个数字不管如何排列，其和为 45，也就是说其数字根为 9，因此形成的数必是 9 的倍数，不可能是素数。这类可逆素数中最大的一个是包含 9 个数字的 987653201。

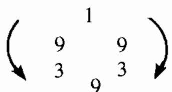


图 9-1　循环可逆素数

还有一类是循环可逆素数（cyclic emirp），即如果把素数的最高位数字重复地移到尾部去，形成的数始终也是可逆素数，那么这个可逆素数就叫循环可逆素数。例如 193939，把这个数的各个数位排成一圈，那么不管从哪个数字出发，也不管是顺时针方向还是逆时针方向，取 6 位都得到素数，如图 9-1。

循环可逆素数就太少太少了。在 3 位、4 位、5 位的素数中一个也没有，6 位的就只上面 1 个。有人曾经花很大工夫寻找 7 位以上的循环可逆素数，但都一无所获。最后，约瑟夫·比勒（Joseph Buhler）证明 7 位以上素数中不可能有循环可逆素数。

非常有趣的是，若干可逆素数还能组成一种特殊的"幻方"。图 9-2 和图 9-3 分别给出了 4 阶和 5 阶的 2 个"埃米尔幻方"，其中，每行、每列和 2 条对角线上的数都是可逆素数。这样，一个 n 阶的埃米尔幻方中包含的不同素数就有 $4(n+1)$ 个之多。

9	1	3	3
1	5	8	3
7	5	2	9
3	9	1	1

图 9-2　4 阶埃米尔幻方

1	3	9	3	3
1	3	4	5	7
7	6	4	0	3
7	4	8	9	7
7	1	3	9	9

图 9-3　5 阶埃米尔幻方

当然，不是任意 n 阶都有埃米尔幻方的。例如,2 阶和 3 阶就没有。4 阶的只有上面给出的 1 个。5 阶的不止上面给出的 1 个,有兴趣的读者不妨试试自己找出几个来。此外,由于素数必以 1、3、7、9 结尾,所以埃米尔幻方周边方格中只能是这 4 个数字，因此，阶数高于 4 的埃米尔幻方不可能由 no-rep emirp 组成。

9.4 孪生素数

所谓孪生素数（twin primes）是这样的一对素数，它们的值相差2。或者说，连续的2个奇数如果都是素数，则称之为孪生素数，例如：3和5，5和7，11和13，……在10000以内的孪生素数共130对，最大的一对是9678±1。孪生素数是否无限？这又是一个至今未解之谜。

克利门特（P. A. Clement）早在1949年就给出了判定正整数n和$n+2$是否是一对孪生素数的法则如下：

当且仅当

$$4[(n-1)!\ +1]+n\equiv 0[\bmod n(n+2)]$$

则n和$n+2$形成一对孪生素数。

利用前面介绍过的威尔逊定理不难证明这个法则。奇怪的是，纵使有这样一个法则，人们在寻求“最大孪生素数”方面的进展远远不如寻求“最大素数”方面的进展大。1972年时的最大孪生素数记录是$76\times3^{139}\pm1$，是由威廉（H. C. William）和扎鲁克（C. R-Zaruke）创造的。1979年，罗伯特·贝利（Robert Baillie）把这个记录提高到$297\times2^{546}\pm1$。10年以后，Amdahl公司的帕拉第（B. Parady）、史密斯（J. Smith）和扎拉托尼罗（S. Zarantonello）把这个记录推进到$1706595\times2^{11235}\pm1$。进入90年代以后，不断刷新这一记录的又是杜勃讷，他1995年发现的一对最大孪生素数是$570918348\times10^{5120}\pm1$。这对孪生素数的位数各有5129位。1995年以后，不断有人打破杜勃讷的这一记录，新发现的孪生素数一对比一对大，详见表9-1。目前已知的一对最大孪生素数有51090位。比较一下目前已知的最大素数已经是980多万位的数，这对孪生素数不是“小”得可怜吗？当然，如果孪生素数也是无限的，那么它的新记录也总是要不断涌现的。

表 9-1　近年来发现的极大孪生素数对

孪生素数对	位数	发现年份	发现者
$835335\times2^{39014}\pm1$	11751	1999	Ballinger 等
$361700055\times2^{39020}\pm1$	11755	1999	Lifchitz
$871892617365\times2^{48000}\pm1$	14462	1999	Indlekofer 等
$2230907354445\times2^{48000}\pm1$	14462	1999	同上
$2409110779845\times2^{60000}\pm1$	18075	2000	同上
$4648619711505\times2^{60000}\pm1$	18075	2000	同上
$291889803\times2^{60090}\pm1$	18098	2001	Boivin 等
$83475759\times2^{64955}\pm1$	19562	2000	Underbakke 等
$1693965\times2^{66443}\pm1$	20008	2000	LaBarbera 等
$781134345\times2^{66445}\pm1$	20011	2001	Underbakke 等
$665551035\times2^{80025}\pm1$	24099	2000	同上
$1807318575\times2^{98305}\pm1$	29603	2001	同上
$318032361\times2^{107001}\pm1$	32220	2001	同上
$1765199373\times2^{107520}\pm1$	32376	2002	McElhatton 等
$60194061\times2^{114689}\pm1$	34533	2002	Underbakke 等
$33218925\times2^{169690}\pm1$	51090	2002	Papp 等

关于孪生素数，还有一点值得指出，即所有孪生素数均有 $6n\pm1$ 的形式，但 $6n\pm1$ 的数却不一定是素数。

9.5 形成级数的素数

在素数表中，我们还能发现有一些素数恰好形成算术级数。例如：

7，37，67，97，127，157（公差 30）

7，157，307，457，607，757，907（公差 150）

71，2381，4691，7001，9311，11621，13931（公差 2310）

107，137，167，197，227，257（公差 30）

199，409，619，829，1039，1249，1459，1669，1879，2089（公差 210）

这一现象引起了许多数学家的注意并就此展开研究，取得了许多成

果。其中包括我国数学家潘承洞取得了世界领先的研究成果。早在1837年，狄里希莱特（G. L. Dirichlet）就给出了有关这一问题的一个最经典和最重要的定理，这个定理说，若 $d \geqslant 2$ 和 $a \neq 0$ 是2个互为素数的正整数，则下列算术级数包含无限多的素数

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots$$

注意：这个定理并没有说这个算术级数中的每一项都是素数，而是说其中有无限多的项是素数。我们感兴趣的当然还是所有项都是素数的级数。数学家们致力于找项数尽可能多的级数，可惜至今进展不大。前面我们列出的几个级数中，项数最多的一个是10项，公差210，首项199，末项2089。有了计算机以后，人们陆续发现了包括12项（1958年），13项（1963年），14项、15项（1969年），16项（1976年），17项（1977年），18项（1983年），19项（1984年），20项（1987年），21项（1992年）和22项（1995年）的级数。包括22项的级数其公差为4609098694200，首项为11410337850553，是普里恰特（P. Pritchard）等3人动用60多台计算机协同工作才找到的。杜勃讷在同一年也找到了一个级数，虽然只有7项，公差只有210，但其首项已经是一个97位的素数，从而也创造了记录。至今，有没有由素数组成的任意长的算术级数，比如说有50项的素数序列，仍然是一个未知数，需要人们继续去研究与探索。

9.6 素数与 π 及其他

素数同 π 是什么关系？我们知道，圆周率 π 是无理数，其数位是无限延伸的，而且其中0，1，2，…，9出现的频率是相等的。图9-4是用计算机打印出来的 π 的前8182位，其中0～9各数字出现的频率也是基本相等的。目前的记录是2002年创造的，将 π 的值算至12411亿位。π 值（不考虑小数点）在任意位数上中断是否能给出素数？研究结果令人惊奇，这种情况竟然极少极少，至今只发现了4个，即

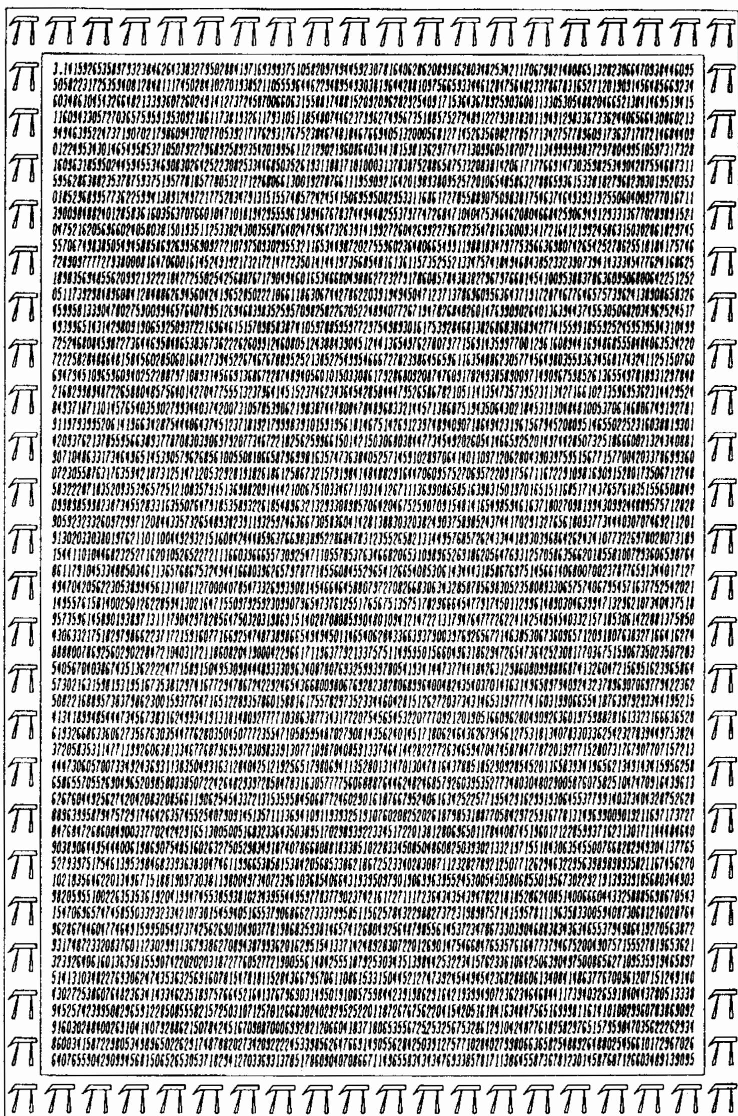


图 9-4　π的前 8182 位

3

31

314159

31415926535897932384626433832795028841

最后这个38位的π是1979年由R. 贝利和马文·旺特利希（Marvin Wunderlich）证明为素数的。贝利还曾经对π值一直验证到432位，都未再发现素数。但是否就不再有第5个、第6个……由π值形成的素数了呢？目前也还不能下结论。

再一个是计数数，即按顺序写下1，2，3，…形成的数

123456789101112131415161718192021…

在计数的某一点上中断能给出素数吗？显然在计至偶数时中断绝不会形成素数，但令人意想不到的是，在任意奇数上中断也至今没有发现一个素数！哈里·尼尔森（Harry Nelson）已经对此一直验证到2^{48}位。但继续验证下去会不会碰到素数？对此也没有人敢下结论说“会”或“不会”。

1980年剑桥大学的人类学家里奥·福琼（Reo F. Fortune）提出了这样一个问题：设P_n为最前面几个素数的乘积，即

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n$$

令Q_n是大于$P_n + 1$的最小素数，也就是在$P_n + 1$这个自然数之后遇到的第一个素数。再令

$$F_n = Q_n - P_n$$

这个F_n会有什么性质呢？福琼用$n = 1, 2, 3, \cdots$去验证了一下，发现F_n这个序列有以下情况：

3，5，7，13，23，17，19，23，37，61，67，61，71，47，107，59，61，109，89，103，79，…

这个序列中都是素数！因此福琼猜测F_n全为素数。福琼的这个猜测对吗？目前也还是一个谜。F_n因此被叫做“幸运数”（fortunate number）。

9.7 一些素数倒数的特殊性质

除了素数本身具有种种特殊的性质外，数学家们还发现，若干素数的倒数也具有一些非常有趣而特殊的性质。首先，许多素数的倒数出现循环小数，如

$$\frac{1}{3}=0.3333\dot{3}\cdots$$

$$\frac{1}{7}=0.142857\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\cdots$$

$$\frac{1}{11}=0.0909\dot{0}\dot{9}\cdots$$

$$\frac{1}{13}=0.076923\dot{0}\dot{7}\dot{6}\dot{9}\dot{2}\dot{3}\cdots$$

$$\frac{1}{17}=0.\dot{0}\dot{5}\dot{8}\dot{8}\dot{2}\dot{3}\dot{5}\dot{2}\dot{9}\dot{4}\dot{1}\dot{1}\dot{7}\dot{6}\dot{4}\dot{7}\cdots$$

其中，有几个循环小数非常特别，如

$$\frac{1}{7}=0.142857\cdots$$

$$2\times\frac{1}{7}=0.285714\cdots$$

$$3\times\frac{1}{7}=0.428571\cdots$$

$$4\times\frac{1}{7}=0.571428\cdots$$

$$5\times\frac{1}{7}=0.714285\cdots$$

$$6\times\frac{1}{7}=0.857142\cdots$$

我们看到，$\frac{1}{7}$分别乘以2、3、4、5、6以后获得的数的组成同$\frac{1}{7}$完全一样，只是次序发生了变化。数学家把这样的数叫做“循环数”（cyclic

number)，142857 是其中之一。如果把 0 ~ 9 这 10 个数字均匀地安排在一个圆周上，那么，这个循环数中各数字的顺序形成一个很引人注目的对称图案（图 9-5）。

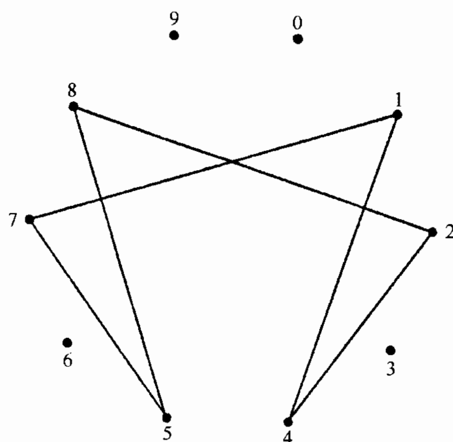


图 9-5 循环数 142857 形成对称图案

把循环数 142857 乘以 7 以上的数字时，也会出现一些有趣的现象。例如

$$142857 \times 12 = 1714284$$

如果把乘积首位的 1 取下来加到末尾的 4 上去，结果又得到了循环数的另一形式 714285，相当于 142857 × 5！

又例如，把 142857 取平方

$$142857^2 = 20408122449$$

把结果分成前 5 位和后 6 位两个数相加

$$20408 + 122449 = 142857$$

竟然又重新变成了原来的循环数！具有这种性质的数叫做“卡泼里卡数”（Kaprekar number）。

循环数 142857 同 9 这个数字也有着千丝万缕的关系。由于 142857

是$\frac{1}{7}$的循环小数，显然

$$142857 \times 7 = 999999$$

把 142857 分成前后 2 个 3 位数相加

$$142 + 857 = 999$$

把 142857 分成 3 组 2 位数相加

$$14 + 28 + 57 = 99$$

把 142857 一位一位相加

$$1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27$$

把结果 27 再分成 2 个 1 位数相加，结果也是 9。

对于任何数，如果从个位起分成 3 位 3 位的若干组相加得结果为 999 的话，它必是 999 的倍数，因此 142857 一定是 999 的倍数，实际上

$$142857 = 999 \times 143$$

我们再来进一步看一个有趣的、并从而可用来进行速算的现象。由于 $7 \times 142857 = 7 \times 999 \times 143$，而 $7 \times 143 = 1001$，$142857143 \times 7 = 1000000001$，这样，你就可以用以下办法以闪电般的速度获得任意一个 9 位数乘以 142857143 的积：把这个任意 9 位数连续写 2 遍，然后除以 7。比如，要求 $577831345 \times 142857143$ 的积，那么你通过用 7 除 577831345577831345，立即就可以得到所需乘积 82547335082547335 了。这个速算法是著名娱乐数学家马丁·加德纳（Martin Gardner）发现的。

142857 这个数的两半还有另一个有趣的性质，即若用它的前 3 位 142 去除它的后 3 位 857，其商是 $6 = 7 - 1$，而余数是 $5 = 7 - 2$，也就是说

$$857 = 142 \times 6 + 5$$

把 142857 分成 3 位 3 位一组或 2 位 2 位一组相加必得 999 或 99 这一性质，对于 142857 的任意倍数（0 除外）也都成立，只要遵守分组从个位开始，以及答案超出 3 位或 2 位时重复一下这个过程这样 2 条规则。例如对 142857 的 361 倍

$$142857 \times 361 = 51571377$$

$$51 + 571 + 377 = 999$$

$$51 + 57 + 13 + 77 = 198,\ 1 + 98 = 99$$

又例如 142857 的 74 倍

$$142857 \times 74 = 10571418$$

$$10 + 571 + 418 = 999$$

$$10 + 57 + 14 + 18 = 99$$

由于重复同一数字可以看成是比率为$\frac{1}{10}$的等比级数各项之和（比如可以把 666 看成是 600，60，6 之和），因此$\frac{1}{7}$这样的循环小数可以通过把某些等比级数相加而获得。比如可以通过把 1，3，9，…这个级数相加而获得 142857…

```
1
 3
  9
  27
   81
   243
    729
    2187
       ⋮
-----------
1428 57…
```

也可以通过把 7，35，175，…这个级数由后往前相加而获得

```
                7
              35
            175
           875
         4375
       21875
     109375
        ⋮
----------------------
…857142857142857
```

恐怕最奇妙的是，可以用 14，28，56，…这样一个级数来生成 142857

```
14
  28
    56
     112
       224
         448
           896
            1792
              3584
                ⋮
--------------------------------
142857142857142857…
```

以上我们比较详细地讨论了$\frac{1}{7}=0.142857\cdots$这个数的许多有趣的性质。这些性质对于其他一些素数的倒数大体上也都是成立的，其条件是：出现循环小数的循环周期具有最大值，即若$\frac{1}{n}$出现循环小数，其循环周期为$n-1$。符合以上条件的素数除7外，还有17，19，23，29，47，59，61，97，109，113，131等，多不多呢？不多。按照商克斯（Danill Shanks）的估计，素数中大约只有3/8符合这个条件。此外，他还证明，周期数为偶数的素数恰好比周期数为奇数的素数多1倍。

上面我们说$\frac{1}{7}=0.142857$所具有的性质，对于循环周期具有最大值的其他素数倒数大体上也都是成立的。为什么说“大体上”呢？这是因为如等比级数的比率等，可能出现稍许不同的情况，而其他性质几乎都是一样的。如$\frac{1}{17}$也有最大循环周期16，因而有

$$\frac{1}{17}=0.05882352\ 94117647$$

$$\frac{2}{17}=0.11764705\ 88235294$$

$$\frac{3}{17}=0.17647058\ 82352941$$

$$\vdots$$

$$\frac{14}{17}=0.82352941\ 17647058$$

$$\frac{15}{17}=0.88235294\ 11764705$$

$$\frac{16}{17}=0.94117647\ 05882352$$

明眼人一眼就能看出，互补的一对数（$\frac{1}{17}$和$\frac{16}{17}$，$\frac{2}{17}$和$\frac{15}{17}$，$\frac{3}{17}$和$\frac{14}{17}$，…）其循环小数的前 8 位和后 8 位刚好调了个个，而同一数的前 8 位和后 8 位相加刚好是 99999999

$$05882352+94117647=99999999$$

把 16 位循环小数分成 4 位 一组相加

$0588+2352+9411+7647=19998$，$1+9998=9999$

分成 2 位一组相加

$05+88+23+52+94+11+76+47=396$，$3+96=99$

一位一位相加

$$0+5+8+8+2+3+5+2+9+4+1+1$$
$$+7+6+4+7=72，7+2=9$$

这些性质我们前面都已经见过了。

对于循环周期不是最大值的素数倒数，其性质则要复杂得多。如$\frac{1}{13}=0.076923076923$，其循环周期仅是最大值 $13-1=12$ 的一半。我们来看一下用 2 ~ 12 乘这个倒数出现的情况

$$2\times\frac{1}{13}=0.153846$$

$$3\times\frac{1}{13}=0.230769$$

$$4\times\frac{1}{13}=0.307692$$

$$5\times\frac{1}{13}=0.384615$$

$$6\times\frac{1}{13}=0.461538$$

$$7\times\frac{1}{13}=0.538461$$

$$8\times\frac{1}{13}=0.615384$$

$$9\times\frac{1}{13}=0.692307$$

$$10\times\frac{1}{13}=0.769230$$

$$11\times\frac{1}{13}=0.846153$$

$$12\times\frac{1}{13}=0.923076$$

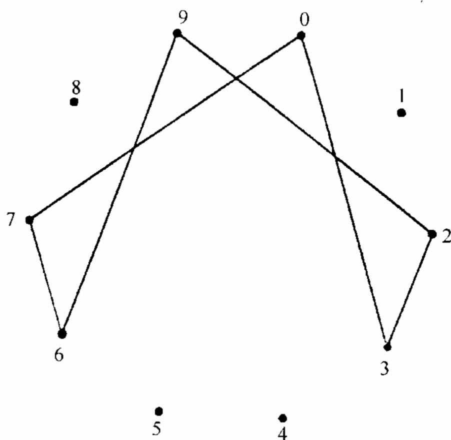


图 9-6　循环数 076923 形成对称图案

由于6位循环数只能出现6次，这样，用2～12乘$\frac{1}{13}$时，其中一组6个（1，3，4，9，10，12）出现循环数076923，其余6个（2，5，6，

7，8，11）出现另一个循环数 153846，把 0～9 这 10 个数字均匀地安排在一个圆周上，把循环数 076923 各数字顺序连接起来将形成一个引人注目的对称图案，如图 9-6。把循环数 153846 各数字顺序连接起来也将是一个对称图案，读者可自行验证。

类似地，素数 41 的倒数是 $\frac{1}{41}=0.\dot{0}\dot{2}\dot{4}\dot{3}\dot{9}$，其循环周期 5 仅是最大值 41－1＝40 的 1/8，因此 $\frac{1}{41}$ 的各倍数将分成 8 组，每组中的 5 个数是由相同数字组成的循环数，共有 8 个循环数，如表9-2。互补的数对（$\frac{1}{41}$ 和 $\frac{40}{41}$，…）相加仍产生 99999。

表 9-2

1	1/41 =.02439	10/41 =.24390	16/41 =.39024	18/41 =.43902	37/41 =.90243
2	2/41 =.04878	20/41 =.48780	32/41 =.78048	33/41 =.80487	36/41 =.87804
3	3/41 =.07317	7/41 =.17073	13/41 =.31707	29/41 =.70731	30/41 =.73170
4	4/41 =.09756	23/41 =.56097	25/41 =.60975	31/41 =.75609	40/41 =.97560
5	5/41 =.12195	8/41 =.19512	9/41 =.21951	21/41 =.51219	39/41 =.95121
6	6/41 =.14634	14/41 =.34146	17/41 =.41463	19/41 =.46341	26/41 =.63414
7	11/41 =.26829	12/41 =.29268	28/41 =.68292	34/41 =.82926	38/41 =.92682
8	15/41 =.36585	22/41 =.53658	24/41 =.58536	27/41 =.65853	35/41 =.85365

最后我们给出利用循环小数来解决一个有趣数学问题的例子。这个问题是著名的英籍波兰科普作家、数学家雅可布·勃洛诺夫斯基（J. Bronowski，1908～1974）发表在 1949 年 12 月 24 日的“New Statesman and Nation”上，作为圣诞节娱乐内容之一的。这个问题是这样的：求一个最小的整数，把这个整数最左边的高位移到最右边去以后，新的数恰好是原来的数的 1 倍半。读者可以先试着自己去解这个题，做不出来再来看下面的解法；做出来的可以把自己的解法同下面的解法作一个比较，看哪个解法更巧妙一些。

设要求的数是 $N=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$，则经过变换以后的数是 $3\ \frac{N}{2}=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_n$。

现在我们考虑如下循环小数

$x=a_n.\,a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0\dot{a}_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1\dot{a}_0$

把 x 除以 10（也就是把小数点左移一位）

$\frac{x}{10}=a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0\cdots$

从 x 中减去 a_n

$x-a_n=a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0a_na_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0\cdots$

上述第一个小数$\frac{x}{10}$是一个纯循环小数,其中的数正是 N 中的数;第二个小数 $x-a_n$ 也是一个纯循环小数,其中的数正是 $3\ \frac{N}{2}$中的数。因此

$$x-a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{10}$$

化简得 $17x=20\ a_n$。

因为要求的是最小整数,所以应取 $a_n=1$,这样 $x=\frac{20}{17}=1\ \frac{3}{17}$，$\frac{3}{17}$我们前面已经见过了,是一个循环小数,因此 $x=1.1764705882352941$。根据 x 的定义,可知 $N=1176470588235294$,这就是所要求的数。如果我们验证一下,把最高位 1 移到末尾去,那么可以看到,两者恰为 1.5 倍关系

$1764705882352941=1.5\times1176470588235294$

这个问题令人感兴趣之处在于,恐怕没人想到满足条件的最小整数竟然有 16 位！另外,这个问题当然也可以通过把 N 表达成

$$N=10^n\ a_n+10^{n-1}a_{n-1}+\cdots+10^2\cdot a_2+10^1\cdot a_1+10^0\cdot a_0$$

然后根据条件找出关系去求解,但那样会繁复和麻烦得多;而巧妙地利用循环小数则简单得多了。最后,这个问题的答案恰恰是素数 17 的倒数所形成的循环数分别乘 2(给出 N)和乘 3(给出 1.5 倍 N)。如果不要求是最小整数,则若取 $a_n=2$,答案将是该循环数乘 4;取 $a_n=3$,是该循环

数乘 6;取 $a_n=4$,是该循环数乘 8;取 $a_n=5$,是该循环数乘 10,你看多有意思。

把这个问题推而广之,如果要求把一个数的最左一位移到最右边去,新的数是原来的数的 3 倍,我们可以如法炮制,立刻得到结论,这个数是素数 7 的倒数所形成的循环数 142857(解题中取 $a_n=1$)。如果不要求是最小整数,那么可取 $a_n=2$,是该循环数乘 2,即 285714。而如果要求把一个数的最左一位移到最右边以后,新的数是原来的数的 5 倍,那么答案就是该循环数乘 5,即 714285。

9.8 素数分布的有趣图案

前面我们介绍过有关素数分布的一些有趣现象，如欧拉公式产生的素数在方阵对角线上（图 8-1），乌拉姆观察到的素数分布规律图（图 8-2 和图 8-3）。这一节我们介绍另外两位科学家在这方面所做的有趣工作。

首先是 IBM 公司的研究员庞考夫（我们前面已经见过他了），他建立一个素数的序列 p_i，当 $i=0$，1，2，3，…时，则 $p_0=2$，$p_1=3$，$p_2=5$，$p_3=7$，…。然后他画出 p_i 对 p_{i+1} 的图，则由于素数序列中的间隔，将形成一条斜率大约是 1、稍为有些弯弯曲曲的对角线。

如果在同一个坐标轴中画一系列 p_i 对 $p_{i+\alpha}$ 的图，α 分别取 1，2，3，…,200，则形成的图案如图 9-7 所示，非常像一幅方格花纹布，其底部边缘就是上面说的 p_i 对 p_{i+1} 的图形。方格花纹的疏密程度表示出了素数序列中的间隔。如果取愈来愈大的素数作这个图，则素数变得愈来愈稀少，因此方格花纹布也变得愈来愈粗糙。

庞考夫的这个图案是用计算机产生的。在 IBM RISC System/6000 上，用幼拉脱斯芬的筛法获得上述图形所需的全部素数只需要 1 ~ 2 秒钟。

第二位是德国哥廷根大学的物理教授施罗德（Manfred

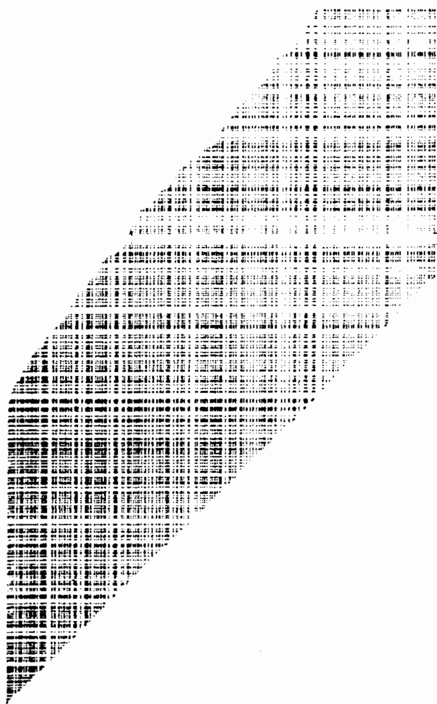


图 9-7 p_i 对 $p_{i+\alpha}$ 的图形

R. Schroeder)，他在黑色坐标纸上作出下列函数的图形

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x \text{ 和 } y \text{ 是互素的数}\\ -1, & \text{否则}\end{cases}$$

当函数值为 +1 时，用白点表示。x 和 y 值在 1 和 256 之间时的图形如图 9-8 所示，多像一幅织锦或地毯！这个图除了一些很明显的特点（例如白点相当均匀）外，还有一些比较隐蔽的特点，比如能被某一整数整除的数是具有周期性的，即每 2 个数中有一数能被 2 整除，每 3 个数中有一数能被 3 整除，每 5 个数中有一数能被 5 整除，如此等等。因此，在无限区间中任取一数能被一个素数 p 整除的概率是 $1/p$，任取两个数都能被 p 整除的概率是 $1/p^2$，而不能同时被 p 整除的概率是 $1-1/p^2$。

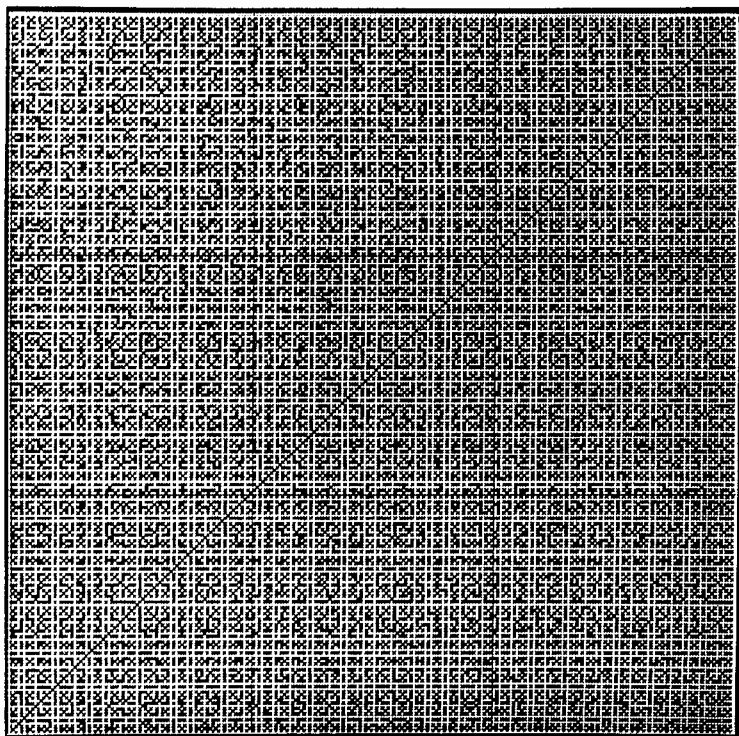


图 9-8 函数 $f(x, y)$ 的图形

那么，任取两个数互素的概率 P 是多少呢？可以算出 $P=6/\pi^2=0.6079\cdots$（计算过程涉及比较深奥的数学，我们这里不介绍了，感兴趣的读者可参阅《Mathematical Intelligencer》（Vol. 4（1982），p. 158 ~ 161）；或施罗德的专著《Number Theory in Science and Communication》，Springer Verlag，1984）。如果我们用 2 和 11 之间的 100 对数来验证的话，互素的正好有 60 对。

那么 $f(x, y)$ 的平均值是多少呢？因为函数值为 $+1$ 的概率为 $6/\pi^2$，-1 的概率为 $1-6/\pi^2$，因此 $f(x, y)$ 的平均值将为

$$(+1)(6/\pi^2)+(-1)(1-6/\pi^2)=0.2158\cdots$$

对上述函数进行傅里叶变换也很有意思。图 9-9 就是对 $f(x, y)$ 进

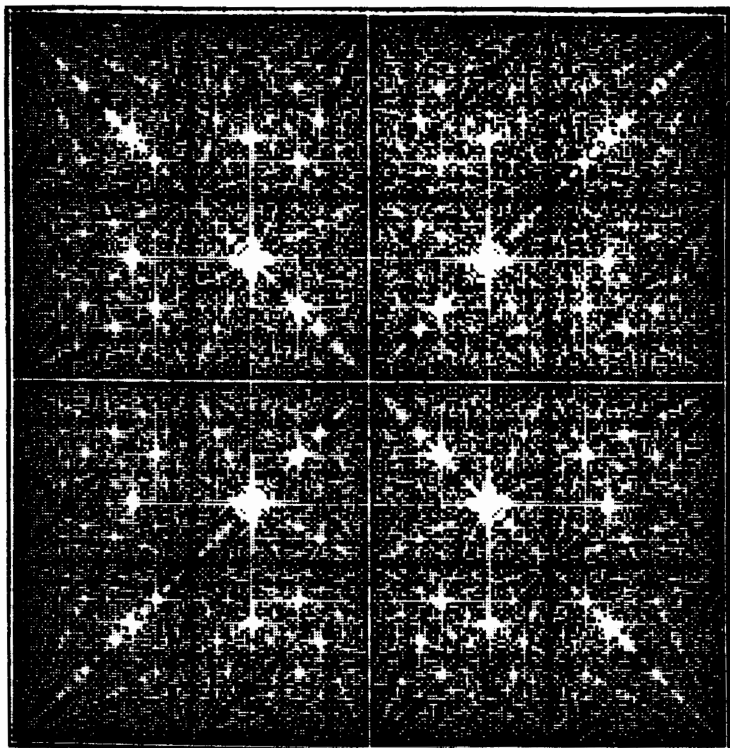


图 9-9 对 $f(x, y)$ 进行傅里叶变换获得的图形

行如下离散傅里叶变换的结果

$$g(u,v) = \sum_{x=1}^{256} \sum_{y=1}^{256} f(x,y) \mathrm{e}^{2\pi i(ux+vy)/256}$$

同上面不一样的是，当 x 和 y 两者的最大公约数 GCD $(x, y)=1$ 时，在黑色坐标纸上画一个白点，否则不画；而白点的大小则根据傅里叶变换的幅值而有不同，从而使幅值愈大，则白点愈大、愈亮，形成闪烁星空的效果。这个图对两条对角线是对称的，对中央的水平和垂直轴则是近似对称的。通过计算，我们还可以知道，图 9-9 中那 4 颗最亮的星是对应于素数 3 的，次亮的 $4\times4=16$ 颗星是对应于 5 的，而 $4\times9=36$ 颗三等星是对应于 7 的。

9.9 高斯素数和艾森斯坦素数

到这里为止，我们所讨论的素数都是定义在整数域 Z 上。这一节，我们来介绍两个不是定义在整数域上的素数，即高斯素数和艾森斯坦素数。

高斯素数（Gauss primes）是定义在复数域 C 上的，它是高斯整数 $n+im$ 的一个子集，其中 $i^2=-1$。在整数域上具有 $4k-1$ 形状的普通素数在复数域上仍然是素数，即高斯素数，而 2 以及形如 $4k+1$ 的普通素数在复数域上可以被分解，因此就不是高斯素数了，因为我们有

$$2=(1+i)(1-i)$$

$$5=(2+i)(2-i)$$

$$13=(2+3i)(2-3i)$$

$$\vdots$$

高斯素数在阿尔甘图（Argan Diagram）上的分布形成十分有趣的图案，如图9-10，它曾经被用在一种桌布上。所谓阿尔甘图，是瑞士数学家阿尔甘（Jean Robert Argan，1768～1822）发明的用几何学上的方法表示复数的图形。图 9-10 是范数（norm）$n^2+m^2<1000$ 时的情况。

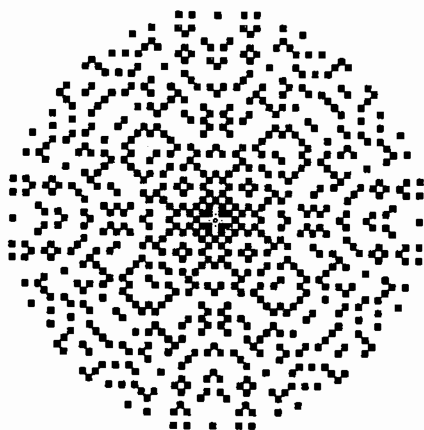


图 9-10　高斯素数分布的阿尔甘图

高斯的学生艾森斯坦（Ferdinand Gotthold Eisenstein，1823～1866）基于复三次方程 $1+\omega+\omega^2=0$ 的根 $\omega=(1-\sqrt{-3})/2$ 也定义了一种素数。形如 $n+m\omega$ 的数被称为艾森斯坦整数；而艾森斯坦素数则是艾森斯坦整数的一个子集，即其中不能再被分解的那一类。说来有趣，复整数理论的创立者高斯曾经拒绝承认它也是整数，因为 ω 包含一个分母。但艾森斯坦证明它完全符合高斯的复整数理论，从而最终被公认为一类复整数。同高斯素数不同，普通素数 2 在 ω 平面上是不能再被分解的，因此是艾森斯坦素数；而 3 以及所有形如 $6k+1$ 的素数则可以被分解，而不是艾森斯坦素数

$$3=(1-\omega)(1-\omega^2)$$
$$7=(2-\omega)(2-\omega^2)$$
$$13=(3-\omega)(3-\omega^2)$$
$$\cdots$$

艾森斯坦素数的分布也形成十分有趣的图案，如图 9-11 所示。它是呈六边形对称的，在中心附近有完整的 6 个六边形，同蜂窝非常相似。

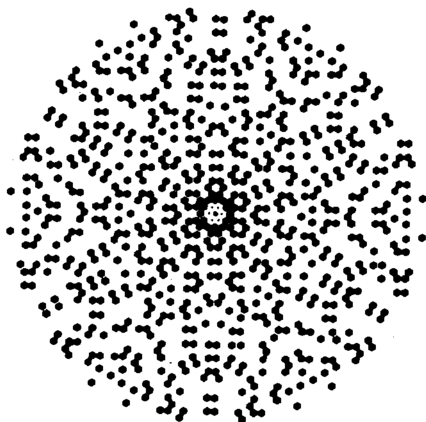


图 9-11　艾森斯坦素数的分布

习　题

作为第 8 章和第 9 章有关素数问题的讨论的结束，我们给出一些习题请读者解答。

[习题 9-1] 将 0 ~ 7 这 8 个数字分布到一个立方体的 8 个顶角上去，使立方体 12 条边 2 端的数字之和都是素数，见图 9-12。

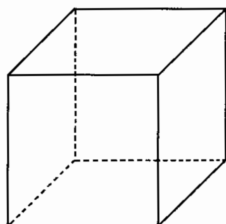


图 9-12　习题 9-1

[习题 9-2] 在图 9-13 的 9 个黑点处填以数字，使 3 条横线、3 条竖线以及 10 条斜线上的数正向读和反向读均为素数。如果不考虑将图形旋转所获得的同构解，本题共有5个可能答案。

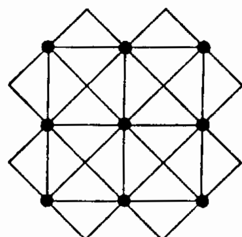


图 9-13　习题 9-2

[习题 9-3] 试构成这样一种特殊的 4 阶幻方：在 4 × 4 的方阵中填入 1 ~ 16,使方阵中任意相邻 2 数（包括左右相邻和上下相邻）之和都是素数。

[习题 9-4] 类似于上题，将 1 ~ 25 填入 5 × 5 的方阵，使任意相邻 2 数之和都是素数，且限制 40 个和数都不得小于 11，又不得大于 41。

10 素数和完美数

所谓完美数（perfect number）是这样的数，它的所有真因子（包括1，但不包括这个数本身）之和正好等于这个数本身。例如

$6=1\times2\times3$，而 $1+2+3=6$

$28=1\times4\times7=1\times2\times14$，而 $1+2+4+7+14=28$

6 和 28 是最小的 2 个完美数，这在古代的希腊就已经被发现了。由于 6 是古时传说中上帝创造世界所用的天数，而 28 是月亮绕地球 1 周所需的天数，这使完美数在古人眼中蒙上了一层神秘的色彩。至于我们今天说“神秘的完美数”，不是上面的意思，而是因为对完美数我们还有许多未解决的问题。

10.1 求完美数的公式

怎样判断一个数是不是完美数呢？如果用我们开头的方法，把某个数的真因子都找出来，再把它们相加，看其和是否同该数相等，那就太麻烦了。值得庆幸的是，2300 多年前伟大的数学家欧几里得早就解决了这个问题，他指出，只要2^n-1是一个素数，那么

$$N=2^{n-1}(2^n-1)$$

一定是一个完美数。

利用欧几里得的这个公式，人们很早就找到了最前面的 5 个完美数

n	完美数
2	6
3	28

5	496
7	8128
13	33550336

欧几里得不但正确地给出了求完美数的公式，还给出了对这个公式的证明：若 2^n-1 是素数，则 2^{n-1} (2^n-1) 的真因数之和为

$$(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})+[(2^n-1)+2(2^n-1)+2^2(2^n-1)+\cdots+2^{n-2}(2^n-1)]$$

对上式进行化简即得

$$(2^n-1)+(2^{n-1}-1)(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)。$$

1730 年，欧拉在 23 岁时对欧几里得的完美数公式给出了一个严格的数学证明，还证明它是获得所有可能的偶完美数的唯一公式。

10.2 完美数与梅森素数

在欧几里得求完美数的公式中，关键是 2^n-1 必须是素数。而 2^n-1 形式的素数我们前面已经详细介绍过，正是梅森素数。这样，在完美数和梅森素数之间，就建立起了一个严格的对应关系：只要找到一个梅森素数 2^n-1，把它乘上 2^{n-1}，也就找到了一个完美数。因此，目前数学界的注意力集中于找寻梅森素数而不再专门关注完美数。前面我们已经提到，到目前为止，人们一共才找到 44 个梅森素数，最大一个是 2006 年 9 月找到的 $2^{32582657}-1$，是一个有 9808358 位的数；这样，到目前为止，已知的完美数也就只有 44 个，最大的一个是 $2^{32582656}$ $(2^{32582657}-1)$，是一个有 19616715 位的数。从最小的、只有 1 位的 6，到这个有 19616715 位的完美数，横跨如此巨大范围内的数，只有 44 个是完美数，可见完美数确实是十分稀少、十分珍贵的，如同“完人难觅”一样，完美数也难觅啊。

10.3 完美数的一些特征

除了因子和恰等于该数自身以外，完美数还有一些令人注目的特点。

（1）除了第一个完美数6以外，所有的完美数都可以表达为若干个数的立方之和。对于用欧几里得公式表示的完美数 $N=2^{n-1}(2^n-1)$，恰恰等于自然数的最前面 $2^{\frac{n-1}{2}}$ 个奇数的立方和。例如

$n=3$，完美数 $28=1^3+3^3$

$n=5$，完美数 $496=1^3+3^3+5^3+7^3$

$n=7$，完美数 $8128=1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$

$$\vdots$$

（2）完美数的末尾2位，要么是28，要么是一个奇数后跟6，这可从前面表中看出。

（3）除了最小的完美数6以外，其余完美数的数字根必为1。所谓一个数的数字根（digital root）是指把该数的各位相加，若其和多于一位，则继续把其各位相加……直至最后获得的一位数。例如

完美数28：$2+8=10$，$1+0=1$

完美数496：$4+9+6=19$，$1+9=10$，$1+0=1$

完美数8128：$8+1+2+8=19$，$1+9=10$，$1+0=1$

$$\vdots$$

（4）1952年，数学家发现，每一个完美数都可以简单地表达成从1开始的 (2^n-1) 个连续的自然数之和，而 n 就是求完美数的欧几里得公式中的 n。如

$$6=1+2+3$$

$$28=1+2+3+4+5+6+7$$

$$496=1+2+3+\cdots+31$$

$$8128=1+2+3+\cdots+127$$

$$\vdots$$

其实这一现象是同欧几里得完美数公式直接联系着的。因为表达为若干连续数之和以后，完美数实际上成为一个首项为 1，末项为（2^n-1），项数也是（2^n-1），公差也是 1 的算术级数，根据算术级数的求和公式立即可变换为欧几里得完美数公式

$$\frac{1+(2^n-1)}{2}\cdot(2^n-1)=\frac{2^n}{2}\cdot(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)$$

由此可知，从 1 开始的连续（2^n-1）个自然数之和均有 2^{n-1}（2^n-1）形式的和；但只有当 n 为素数，（2^n-1）也是素数时，这个和数才是完美数。

（5）每一个完美数，它的所有的因子（这次要加上等于该完美数本身的这个因子）的倒数之和都等于 2，如

完美数 6：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$

完美数 28：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$

完美数 496：$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}=2$

$$\vdots$$

（6）是否只有偶数才有可能是完美数，奇数中就没有完美数？这是个数学家至今没有解决的问题。许多数学家相信，奇完美数是不存在的，但无法给出充分的证明。也有数学家证明12m +1或 36m +9 形式的奇数（其中 m 是素数）中有可能存在完美数，但由于至今没有找到这样的 m，这个论断只能作为一种猜想。1968 年，布克曼（Bryant Buckerman）证明奇完美数如果存在，至少有 36 位（即 $>10^{36}$）。但 30 多年过去了，在 36 位以上直至 200 位的奇数中人们仍然没有找到一个完美数，使得完美数世界至今仍然是一个“单极世界”。这个世界级难题的解决有赖于要么“抓”出一个奇完美数来，要么能证明不存在奇完美

数，否则将始终困扰着一代又一代的数学家。

10.4 多倍完美数

以上讨论的完美数是普通完美数，一般记作 P_2，因为实际上，如果把这样的数的所有因子（包括该数本身）相加的话，其和恰为该数自身的2倍。

已经发现，一个数的所有因子相加，其和可能正好等于该数本身的3倍、4倍、5倍等。这样的数叫多倍完美数（multiply perfect number）。如果是3倍。记为 P_3；如果是4倍，记为 P_4……

例如，120这个数，其因子包括

1，2，3，4，5，6，8，10，12，15，20，24，30，40，60，120

把它们相加得360，是120的3倍，所以120是3倍完美数。另一个3倍完美数是672。已发现的4倍完美数有30240，5倍完美数有14182439040。6倍、7倍的完美数也有发现，都是很大很大的数了。同普通完美数一样，多倍完美数目前也是“单极世界”，即只有偶数，没有奇数。

10.5 另一种完美

完美数是根据数的因子和等于其自身定义的。如果考察数的因子积的情况，那么可以发现，有些数的因子积刚好是一个完全平方（perfect square），或者立方，或者4次方……由于已经把完美数定义给前者，再加后一种情况的数相对而言比较多，而人们的心理状态总是“物以稀为贵”，因此这种数也就没有专门起名了。笔者认为，对这样的数也应给予一定的重视，因为它们毕竟具有“另一种完美”。现把100以内的这样几个数列在下面

数	因子积
12	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 144 = 12^2$
20	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 = 400 = 20^2$
24	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 = 13824 = 24^3$
40	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 20 = 64000 = 40^3$
45	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 = 2025 = 45^2$
48	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 24 = 5308416 = 48^4$
80	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 40 = 40960000 = 80^4$

11 素数和亲和数

11.1 什么叫亲和数？

任取自然数，把它的各个因子（包括1，但不包括该数自身）相加，得一数；再取该数的因子相加……如此重复进行，会出现什么情况呢？这有以下3种情况：

（1）若数重复取因子和，绝大多数最后都收敛为1。对于素数，这个结论是不言而喻的；对于合数，在重复取因子和的过程中一旦在某1步其结果为素数，立即也就掉进1这个黑洞。例如，20这个数的演变过程如下

$$20: 1+2+4+5+10=22$$

$$22: 1+2+11=14$$

$$14: 1+2+7=10$$

$$10: 1+2+5=8$$

$$8: 1+2+4=7$$

$$7: 1$$

（2）数的因子和恰为该数自身。这样的数叫“完美数”，我们在第10章中刚刚详细地介绍过它了。

（3）某数的因子和为另一数，而这个另一数的因子和恰恰又是某数。这样的一对数称为亲和数或友好数（amicable number）。

亲和数是希腊的雅勃利丘斯（Iamblichus）在公元320年首先发现的。他注意到284的因子和为

$$1+2+4+71+142=220$$

而220的因子和为

$$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55=284$$

他觉得很有意思，向当时的大数学家毕达哥拉斯报告了他的发现。他们想再找出一对这样的亲和数，但是没有成功。直到 1636 年，法国的大数学家费马才找到了又一对亲和数：17296-18416，2 年以后，即 1638 年，笛卡儿发现了更大的一对亲和数：9363584-9437056。100 多年以后，欧拉经过系统研究，于 1750 年给出了 60 对亲和数。但奇怪的是，他们都漏掉了 220-284 之后最小的一对亲和数，即 1184-1210。这对亲和数是 1866 年由当时年仅 16 岁的意大利数学家帕卡尼尼（Nicolo Paganini）发现的。

11.2 产生亲和数的公式

有没有产生亲和数的公式呢？7 世纪时阿拉伯数学家泰比特·本柯拉（Thabit ben Korrah）发现，若 x 是大于 1 的整数，而以下 3 式都是素数

$$a = 3 \cdot 2^{x} - 1$$

$$b = 3 \cdot 2^{x-1} - 1$$

$$c = 9 \cdot 2^{2x-1} - 1$$

则

$$F_1 = 2^{x}ab$$

$$F_2 = 2^{x}c$$

是一对亲和数。当 $x = 2$ 时，通过以上公式获得的就是亲和数 220 和 284。你看，亲和数和素数又有着多么紧密的关系！亲和数对的例子还有

2620-2924

5020-5564

6232-6368

10744-10856

17296-18416

9363584-9437056

111448537712-118853793424

在计算机的帮助下，目前已知的亲和数有 4 万多对。其中，10^5 以内共 13 对，10^6 以内共 42 对。下面是 10 万以内的 13 对

$$\begin{cases}220 = 2\times 2\times 5\times 11\\284 = 2\times 2\times 71\end{cases}$$

$$\begin{cases}1184 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 37\\1210 = 2\times 5\times 11\times 11\end{cases}$$

$$\begin{cases}2620 = 2\times 2\times 5\times 131\\2924 = 2\times 2\times 17\times 43\end{cases}$$

$$\begin{cases}5020 = 2\times 2\times 5\times 251\\5564 = 2\times 2\times 13\times 107\end{cases}$$

$$\begin{cases}6232 = 2\times 2\times 2\times 19\times 41\\6368 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 199\end{cases}$$

$$\begin{cases}10744 = 2\times 2\times 2\times 17\times 79\\10856 = 2\times 2\times 2\times 23\times 59\end{cases}$$

$$\begin{cases}12285 = 3\times 3\times 3\times 5\times 7\times 13\\14595 = 3\times 5\times 7\times 139\end{cases}$$

$$\begin{cases}17296 = 2\times 2\times 2\times 2\times 23\times 47\\18416 = 2\times 2\times 2\times 2\times 1151\end{cases}$$

$$\begin{cases}63020 = 2\times 2\times 5\times 23\times 137\\76084 = 2\times 2\times 23\times 827\end{cases}$$

$$\begin{cases}66928 = 2\times 2\times 2\times 2\times 47\times 89\\66992 = 2\times 2\times 2\times 2\times 53\times 79\end{cases}$$

$$\begin{cases}67095 = 3\times 3\times 3\times 5\times 7\times 71\\71145 = 3\times 3\times 3\times 5\times 17\times 31\end{cases}$$

$$\begin{cases}69615 = 3\times 3\times 5\times 7\times 13\times 17\\87633 = 3\times 3\times 7\times 13\times 107\end{cases}$$

$$\begin{cases}79750 = 2\times 5\times 5\times 5\times 11\times 29\\88730 = 2\times 5\times 19\times 467\end{cases}$$

以上我们把所有 13 对亲和数都写成素因子的连乘积，因为这样就可以很容易验证它们互为亲和数。例如，220 = 2 × 2 × 5 × 11，因此 220 的真因子就是 1、2、2 × 2 = 4、5、2 × 5 = 10、11、2 × 2 × 5 = 20、2 × 11 = 22、2 × 2 × 11 = 44、5 × 11 = 55、2 × 5 × 11 = 110，共 11 个，其和为 284。而 284 = 2 × 2 × 71，由此可知其真因子为 1、2、2 × 2 = 4、71、2 × 71 = 142，共 5 个，其和为 220。由此可见，把数分解为素因子并写成素因子的连乘积可方便寻找或证明亲和数。

11.3 亲和数链

以后又发现了亲和数群或叫亲和数链（amicable number chain），即甲数的因子和是乙数，乙数的因子和是丙数，……经过几个环，回到甲数。例如，有 5 个环的亲和数群

12496 - 14288 - 15472 - 14536 - 14264 - 12496

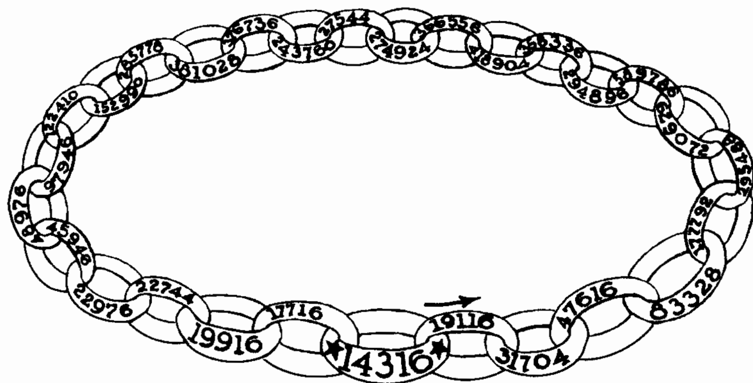


图 11-1　有 28 个环的亲和数链

这样的亲和数群又叫“合群数”。目前已知的最大亲和数链中有 28 个环，其中最小的一个数是 14316，最大的一个是 629072。如果把最小那个数当作第一个环的话，该亲和数链如图 11-1，包含各数顺序如下

14316 – 19116 – 31704 – 47616 – 83328 – 177792 – 295488 – 629072 – 589786 – 294896 – 358336 – 418904 – 366556 – 274924 – 275444 – 243760 – 376736 – 381028 – 285778 – 152990 – 122410 – 97946 – 48976 – 45946 – 22976 – 22744 – 19916 – 17716 – 14316

以上 2 个亲和数链都是法国数学家普莱特（P. Poulet）在 1918 年发现的。

有关亲和数的研究虽然取得了很大成绩，但仍有许多未解之谜。例如，亲和数是否有无限多？此外，人们发现，本柯拉的公式只能产生少数几个亲和数对，因此数学家们还在寻找更通用的公式。关于亲和数研究的现状，剑桥大学的华裔科学家 Sony Yan 博士在 Mathematics Tody 1997 年 6 月号上有一篇很好的综述论文，感兴趣的读者不妨一阅。

12 素数和幻方

至此，我们对娱乐数学中的两大经典名题，即幻方和素数，都已做了较为详尽的介绍。大家看到，无论是幻方还是素数，都包含有许许多多有趣的现象，也存在着许许多多未解之谜，刺激着人们的好奇心和探索的愿望。现在我们要问，当幻方和素数碰在一起时会出现什么现象呢？是不是会更加有趣呢？答案是肯定的。作为本书的结束，我们向大家介绍兼涉幻方和素数两者的数学问题。

12.1 素数幻方

素数幻方最早是由杜德尼在 1900 年提出的，就是方阵中的数全都是素数的幻方。当然，素数幻方也是一种非连续数幻方。杜德尼自己构成的一个 3 阶素数幻方如图 12-1(a)，幻方常数为 111。继杜德尼之后，贝尔格霍尔特（E. Bergholt）和舒特哈姆（C. D. Shuldham）给出了 4 阶素数幻方，如图 12-1(b)，幻方常数为 102。在 20 世纪初，1 还被当做素数，所以这 2 个幻方中都包含 1。后来明确 1 不是素数以后，人们重新构造了 3 阶和 4 阶的素数幻方如图 12-2。其中 3 阶素数幻方是鲁道尔夫・昂德里卡（Rudolph Ondrejka）发明的，这是目前已知的幻方常数最小（177）的 3 阶素数幻方。图中的 4 阶素数幻方是小约翰逊（A. W. Johnson，Jr.）设计的，幻方常数为 120。有意思的是，不管是否把 1 当做素数，能构成的 3 阶素数幻方的幻方常数总是大于 4 阶的。

在研究素数幻方方面，赛尔斯（H. A. Sayles）和蒙塞伊（J. N. Muncey）是佼佼者，他们构造出了 5 阶、6 阶以至 12 阶的素数幻方。其中以 12 阶的素数幻方最为精巧，正好用了素数表中最前面的 144

个奇素数（包括 1）。自此之后，有许多数学家试图用最前面的 n^2 个奇素数来构成 n 阶的素数幻方，但都没有成功。最后证明，当 $n<12$ 时，用最前面的 n^2 个奇素数构成 n 阶幻方是不可能的。

67	1	43
13	37	61
31	73	7

(a)

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

(b)

图 12-1　最初构成的素数幻方（含 1）

17	113	47
89	59	29
71	5	101

(a)

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

(b)

图 12-2　不含 1 的 3 阶和 4 阶素数幻方

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

图 12-3　由算术级数构成的 3 阶素数幻方

能不能用形成算术级数的 9 个素数构成幻方？答案是肯定的，而且找到了很多。图 12-3 是幻方常数最小（3117）的这样一个 3 阶素数幻方，公差为 210。

小约翰逊在开发素数幻方上有很多贡献，除了前面的 4 阶素数幻方以外，其中最引人注目的是一个 6 阶的素数幻方，如图 12-4。这个幻方在西方引起了很大的重视，被称为是“有启示性的幻方”（apocalyptic magic square）。其原因有二：①它不是一个普通幻方，而是一个泛对角线幻方，即“完美幻方”，这对于素数幻方而言是十分难得的。图中有阴影的 6 个方格即组成一折对角线；②这个幻方的幻方常数是 666。而 666 在西方被称为“兽数”（beast number），是一个有特殊意义的数。大写的 beast，即 Beast 在基督教中指反对基督的人。可惜对这个

幻方的发明人小约翰逊我们也一无所知。

3	107	5	131	109	311
7	331	193	11	83	41
103	53	71	89	151	199
113	61	97	197	167	31
367	13	173	59	17	37
73	101	127	179	139	47

图 12-4　小约翰逊的 6 阶素数幻方

以上介绍的这些幻方都是“凑”出来的。有没有构成素数幻方的通用模板呢？1938 年，贝尔格霍尔特终于找到了构成 4 阶素数幻方的一个一般形式如图 12-5。

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

图 12-5　4 阶素数幻方的模板

当取 $A=13$，$B=11$，$C=37$，$D=41$（这 4 个数显然必须取素数），$a=10$，$b=18$，$c=24$，$d=-2$ 时，即得图 12-1（b）的4阶素数幻方。

若满足 $a=b=d-c=\frac{1}{2}(A-B-C+D)$，则形成的素数幻方还是完美的。若满足 $a+c=d=b-c$ 且 $A+C=B+D$，则素数幻方是对称的。读者不妨根据以上一般形式找几个4阶素数幻方出来。由以上条件还可以知道，4阶素数幻方不可能既是对称的，又是完美的，因为这导致 $A-a=B$，而幻方中不允许有2个相同元素。

前面我们提到，用最前面的 n^2 个奇素数是不可能构成 $n<12$ 的 n 阶幻方的。但是有没有可能用素数表中间的连续 n^2 个素数构成幻方呢？这还是有可能的。尼尔逊（H. Nelson）利用 Cray 巨型机一下就发现了这样的22个3阶幻方，其中最小的一个如图12-6。这9个10位数字的素数实际上形成 a，$a+h$，$a+2h$；$(a+k)$，$(a+k)+h$，$(a+k)+2h$；$(a+2k)$，$(a+2k)+h$，$(a+2k)+2h$ 这样一个数列，其中 $a=1480028129$，$h=12$，$k=30$，恰是连续的9个素数。

1480028159	1480028153	1480028201
1480028213	1480028171	1480028129
1480028141	1480028189	1480028183

图12-6 连续素数组成的幻方

在素数幻方的研究与开发方面，中国学者有很出色的成就，这里我们介绍其中的2个。图12-7是一个4阶同尾素数幻方。其中，16个素数均以7结尾，幻和为39968。

2137	7417	8597	21817
8837	21577	2377	7177
21517	8297	7717	2437
7477	2677	21277	8537

图12-7 可以“掐头去尾”的素数幻方

把这个幻方中的所有数都“掐头去尾”，即去掉最高位和最低位以后，它仍然是一个素数幻方，其幻和为294。图12-8也是一个4阶素数幻方，幻和为5792。这个幻方有什么特异之处呢？

193	457	659	4483
1709	3433	283	367
3343	479	1597	373
547	1423	3253	569

图12-8　可以作“三级跳”的素数幻方

它可以进行“三级跳”：在其中各数上都加2310，仍为素数幻方，幻和为15032；在新幻方的各数上再加2310，还是素数幻方，幻和为24272。对普通幻方来说，作任意步长的任意多级跳都是不成问题的，而对于素数幻方来说，设计出能作三级跳，跳了以后仍然是素数幻方，就绝非易事了。

12.2 科艺幻方

辽宁师范大学的周开其先生是中国书法家协会理事，对中国书画有很深的造诣，其作品在国内屡屡获奖。他同时也是幻方的爱好者和富有创新精神的开拓者。他独创的“科艺幻方”将数学与中国文化紧密结合在一起，令人拍案叫绝。所谓科艺幻方就是这样的幻方，如果把幻方中的素数方格勾勒出来，可以形成汉字或图像。2006年初，周开其先生把他精心设计的福字幻方（图12-9）寄赠笔者，使笔者惊叹不已，把它当作最珍贵的新年礼物。在这个16阶幻方中，55个素数方格居中凸显了一个福字，真有鬼斧神功之妙。笔者在2006年9月《科技导报》的“好玩的数学”专栏中把这个福字幻方介绍给读者以后，也赢得了

广大科技工作者的一片叫好，称赞它是科技美和艺术美结合的典范，也是科学与中国传统文化结合的典范。

245	0	10	255	165	150	105	111	133	153	90	144	210	122	45	102
204	54	51	201	63	12	225	243	192	30	24	231	121	228	134	27
185	129	69	70	126	140	55	115	120	100	186	200	96	135	159	155
8	253	247	2	5	250	28	236	19	227	233	37	47	22	208	218
35	203	15	52	220	113	103	142	240	152	66	198	132	189	123	57
147	75	125	180	88	252	108	38	118	137	167	3	130	143	112	217
158	124	188	151	131	67	43	17	238	97	104	179	212	25	76	230
95	138	160	106	31	18	202	224	56	199	149	53	42	117	213	237
99	77	174	81	163	107	148	92	178	156	72	216	80	183	175	39
110	182	242	73	244	239	145	146	13	11	181	109	173	74	82	16
48	223	83	172	226	1	232	29	139	116	23	254	211	44	207	32
49	176	206	62	248	7	154	84	79	101	191	193	157	64	98	171
68	34	128	187	94	89	166	161	197	58	229	26	127	114	141	221
205	119	184	4	194	241	214	14	61	251	71	59	41	136	50	196
222	85	65	249	33	190	21	219	170	6	234	78	46	209	177	36
162	168	93	195	9	164	91	169	87	246	20	60	215	235	40	86

图 12-9　福字幻方

继福字幻方之后，周先生又开发成功了更为复杂的“五龙戏珠”幻方，见图 12-10。这是个 32 阶幻方，填入其中的 0 ~ 1023 中，共有 173 个素数（含 1），把这 173 个素数所在方格勾出轮廓，恰好形成 5 个“龙”字，中间一个大龙是繁体，四周 4 个小龙是简体美术字。如果把位于第一行中间的“○”看作一颗珠子，不就是五龙戏珠吗？

周先生表示，在幻方中形成文字和图像，不是他的最终目的；他希望能通过幻方中的文字图像探求易经及混沌理论的奥秘。我们祝愿周先生的研究取得更大成果，也希望有更多读者参与到这个研究中来。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	517	567	330	74	597	456	368	949	831	506	1023	426	693	192	655	0	625	546	398	273	276	750	244	501	747	522	779	649	477	374	270	753
2	504	96	434	783	414	24	378	999	589	519	609	973	927	50	240	645	684	344	689	180	308	339	679	763	334	260	34	843	555	468	989	715
3	799	210	837	917	813	547	336	186	687	669	354	1005	106	18	224	476	150	995	162	360	1003	663	873	825	109	861	198	286	28	737	20	914
4	170	815	559	242	208	853	464	607	834	416	189	48	448	975	781	575	793	84	237	430	939	585	945	520	786	503	78	593	438	230	755	268
5	10	250	725	743	773	787	659	701	1013	364	66	322	957	298	236	280	875	30	742	166	667	70	148	281	953	857	61	577	993	356	962	446
6	637	965	695	282	144	997	653	26	58	352	671	879	328	386	370	741	633	978	923	390	358	45	227	196	796	769	827	100	946	665	254	77
7	384	304	1019	496	971	478	719	617	4	759	527	264	52	639	406	545	603	889	784	420	713	729	134	326	239	294	991	431	592	697	32	310
8	1015	128	466	733	54	258	557	418	8	605	765	16	969	1007	290	895	987	642	381	583	745	36	440	157	278	866	317	474	706	218	805	549
9	486	723	300	288	482	941	541	320	191	82	832	703	573	537	735	450	396	12	627	841	1011	436	367	262	656	761	509	182	587	514	88	935
10	855	56	184	402	877	168	647	839	967	178	959	146	64	845	621	376	388	47	332	635	817	976	76	206	691	252	947	739	79	284	771	944
11	539	717	591	104	611	238	306	904	432	266	412	757	919	484	785	119	394	383	640	442	629	955	581	864	68	159	960	444	470	553	63	579
12	885	893	6	681	314	767	838	183	1017	185	256	840	342	709	138	130	38	479	863	595	204	985	658	819	365	160	512	428	544	511	871	152
13	226	458	296	951	424	565	366	72	896	657	2	599	127	727	797	1021	228	1009	102	748	14	275	798	535	225	234	488	921	789	795	933	90
14	136	925	905	525	711	80	685	842	338	943	498	181	98	312	887	118	337	937	283	859	86	686	777	740	912	164	246	594	429	807	216	111
15	272	775	116	340	248	970	187	404	194	836	53	751	683	829	619	907	422	132	408	601	22	292	891	699	615	731	704	551	319	324	1001	472
16	749	302	721	623	543	55	480	117	125	847	968	274	898	176	400	906	631	677	613	661	392	362	346	490	410	791	533	372	232	651	154	869
17	652	690	586	644	624	399	333	670	371	437	602	379	353	23	421	1000	5	1008	526	908	846	15	497	1018	115	387	177	702	33	321	990	636
18	568	616	890	407	133	469	554	455	903	247	800	263	776	120	223	760	17	257	569	41	718	931	766	114	454	1006	982	92	305	343	909	680
19	882	736	309	610	287	714	872	141	730	413	794	71	151	293	229	952	563	606	460	814	808	417	534	489	209	215	708	147	315	876	49	974
20	578	405	445	618	255	768	754	355	295	899	856	269	668	728	167	124	193	241	499	467	830	782	524	556	924	638	620	323	99	700	403	385
21	369	746	190	327	205	560	992	382	654	833	696	31	463	277	641	818	449	764	726	574	758	201	259	297	265	169	612	966	57	411	854	822
22	318	279	835	301	961	214	142	705	801	188	722	881	222	744	809	62	67	13	433	113	956	1010	361	911	910	788	662	235	948	75	112	590
23	143	375	85	849	922	101	824	880	648	483	938	37	540	174	199	986	163	630	942	558	179	860	596	465	97	393	844	564	926	427	81	459
24	447	249	576	200	774	823	502	983	674	865	664	521	40	349	359	158	11	419	83	211	307	604	27	1012	812	1	1022	457	716	996	940	566
25	580	772	634	443	251	461	29	389	289	156	423	994	562	734	600	867	1016	870	452	980	692	94	806	7	571	331	43	929	73	950	217	153
26	453	285	712	720	738	311	197	570	732	778	303	762	245	291	826	261	1004	105	548	350	121	475	673	902	918	19	313	878	710	145	972	51
27	441	175	439	582	397	626	149	977	848	584	231	954	874	46	792	69	572	916	299	451	213	820	998	724	107	810	401	59	964	25	622	203
28	531	913	492	821	816	202	271	44	220	110	165	752	803	979	858	207	828	780	588	675	195	243	348	139	518	1020	3	884	988	505	35	435
29	707	650	135	698	888	811	883	316	373	542	325	140	481	1002	212	21	462	155	561	528	267	892	491	532	756	233	409	790	131	614	495	868
30	928	850	936	172	103	920	523	643	173	126	87	500	95	851	380	897	958	934	473	676	65	550	425	886	89	852	347	137	487	598	171	536
31	494	335	529	415	770	253	688	42	122	608	221	984	981	901	802	39	1014	91	515	493	329	129	660	9	932	694	363	508	894	682	530	341
32	93	108	391	377	60	552	471	632	351	915	357	646	930	672	666	963	862	395	510	345	900	161	219	123	507	628	678	513	538	516	804	485

图 12-10　五龙戏珠 32 阶幻方

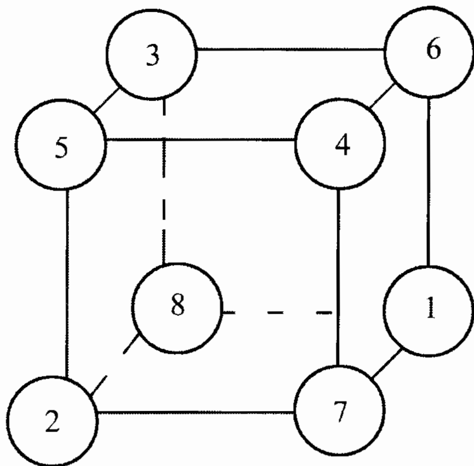
部分习题、问题答案

（未标“习题”的是正文中相应章节中的问题）

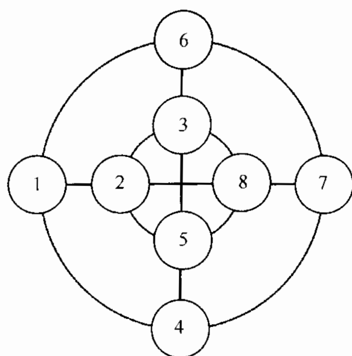
［4-6］T 形幻方如下所示

19	23	11	5	7
1	10	17	24	13
22	14	3	6	20
8	16	25	12	4
15	2	9	18	21

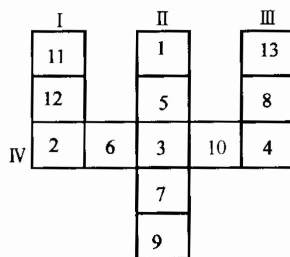
［习题 7-1］最简单的幻立方如下所示，每面 4 顶角上数字之和均为 18。



［习题 7-2］最简单的幻圆如下所示，每条直径上 4 数以及内层和外层上 4 数和均 18。

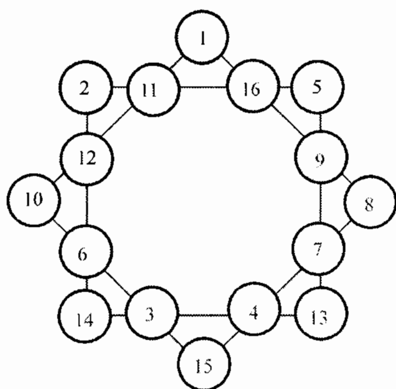


［习题 7-3］

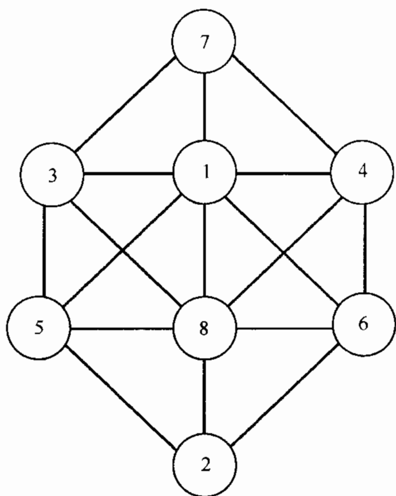


Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ3 个直条和Ⅳ这个横条上的数字之和均为 25。

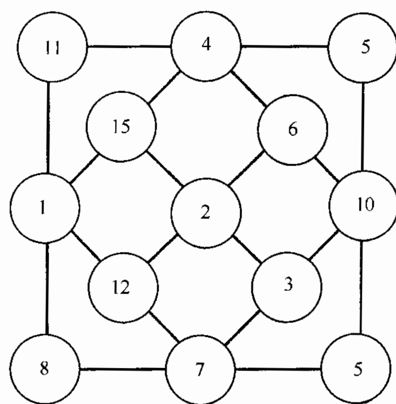
［习题 7-4］交叉方，每边 4 数及 2 个正方形 4 角 4 数之和均为 34。



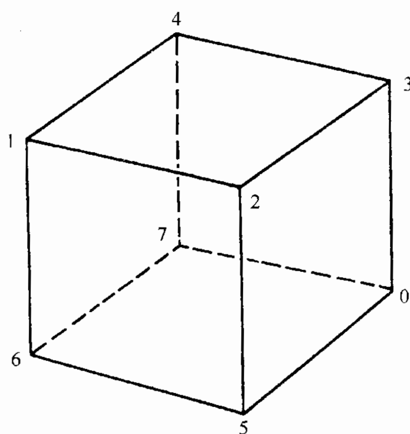
［习题 7-5］ 下图中，任意相邻 2 数都不是相邻的。



［习题 7-6］ 下图中，在 1～15 中未用的是 9、13、14；5 用了 2 个，每线 3 数和均为 20。



［习题9-1］将0~7分布于立方体顶角，使所有12条边2端数字和均为素数的解如下。如不考虑旋转，这个解是唯一的。此外已经证明，除0~7以外，其他任意连续8个数（比如1~8）都不可能实现本题要求。



［习题9-2］本题的5个答案如下

313	313	313	313	313
151	181	151	757	787
313	313	373	313	313

这5个答案均可形成8个3位的可逆素数，4个2位的可逆素数，以及4个1位的素数（但不一定不同）。

[习题9-3] 为了构成上下、左右相邻2数之和均为素数的方阵，显然在横向和纵向都要将8个奇数和8个偶数互相交叉着排列，以便使相加2数中包含1个奇数，1个偶数，使和为奇数，并使奇数不能被3所除尽（仅1+2=3例外）。若不考虑旋转与反射，则满足条件的这样的4阶方阵共有187个解。对每一个这样的解，在奇数上加1，在偶数上减1，必同样满足条件，是为共轭解，两者合计374个解。下面作为示例给出3个解，第3个解中和数包括可能的全部9个素数(3,5,7,11,13,17,19,23,29)，第2个解中没有和数7，第1个解中没有和数5和17。

7	6	13	16
12	1	10	3
11	2	9	4
8	5	14	15

1	16	7	6
2	3	10	13
11	8	9	4
12	5	14	15

7	4	13	16
6	1	10	3
5	2	9	14
12	11	8	15

[习题9-4] 如果只要求任意相邻2数之和都是素数，这样的5阶方阵的解很多很多。限制和在11~41之间，使1个奇数和1个偶数之和小于11以及大于41的2个数均不能相邻，解答就大为减少了。下面给出2个解答作为示例。显然，方阵中奇数和偶数也是交叉分布的，且4角必为奇数占据。

23	8	11	18	1
14	5	12	19	22
17	24	7	4	15
6	13	10	9	2
25	16	3	20	21

23	8	11	12	1
14	5	18	19	22
17	24	13	4	15
6	7	10	9	2
25	16	3	20	21

参 考 文 献

丁石孙 . 1993. 乘电梯 · 翻硬币 · 游迷宫 · 下象棋 . 北京:北京大学出版社

傅钟鹏 . 2001. 数学故事撷趣 . 天津:新蕾出版社

胡久稔 . 1998. 数林掠影 . 天津:南开大学出版社

李迪 . 1999. 中国数学通史 . 宋元卷 . 南京:江苏教育出版社

李俨 . 1955. 中算史论丛 . 北京:科学出版社

李毓佩 . 1998. 数学天地 . 南京:江苏少年儿童出版社

梁宗巨 . 2005. 世界数学通史 . 沈阳:辽宁教育出版社

刘纯 . 1993. 大哉言数 . 沈阳:辽宁教育出版社

谈祥柏 . 1999. 数学广角镜 . 南京:江苏教育出版社

王敬东 . 2000. 探索数形奥秘 . 郑州:大象出版社

王文 . 1998. 妙趣横生的数学王国 . 长春:长春出版社

吴文俊 . 1998. 中国数学史大系 . 北京:北京师范大学出版社

吴振奎,俞晓群 . 1990. 今日数学中的趣味问题 . 天津:天津科技出版社

徐达 . 1992. 数学探秘 . 天津:天津科技出版社

曾晓新 . 1990. 数学的魅力 . 重庆:科学技术文献出版社重庆分社

Ball W W R, Coxeter H S M. 1974. Mathematical Recreations and Essays. Toronto: University of Toronto Pr.

Beiler A H. 1964. Recreations in the Theory of Numbers. NewYork: Dover

Dickson L E. 1952. A History of the Theory of Numbers. New York: Chelsea Pub. Co.

Dudeney H E. 1951. Amusements in Mathematics. London: Nelson

Edwards A W F. 2004. Cogwheel of the Mind. Baltimore: The Johns Hopkins Uni. Pr.

Gardner M. 1965. Mathematical Puzzles and Diversions. Harmondsworth: Penguin

Gardner M. 1971. Martin Gardner's Sixth Book of Games from Scientific American. San Francisco: W. H. Freeman

Gardner M. 1981. Further Mathematical Diversions. Harmondsworth: Penguin

Gardner M. 1985. The Magic Numbers of Dr. Matrix. New York: Prometheus Books(中译本:谈祥柏. 2001. 矩阵博士的魔法数. 上海:上海科技教育出版社)

Gardner M. 1997. The Last Recreations. NewYork: Copernicus

Guy R K. 1994. Unsolved Problems in Number Theory. NewYork: Springer (中译本:张明尧. 2003. 数论中未解决的问题. 北京:科学出版社)

Guy R K. 2004. Unsolved Problems in Number Theory(3rd edition). Berlin: Springer

Honsberg R. 1973,1976,1985. Mathematical Gems Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ. Wash. D. C.: MAA

Hunter J A H, Madachy J. 1975. Mathematical Diversions. New York: Dover(中译本:张远南,张昶. 1998. 数学娱乐问题. 上海:上海教育出版社)

Hunter J A H. 1976. Mathematical Brain-Teasers. NewYork: Dover

Kendall P M H. 1962. Mathematical Puzzles for the Connoisseur. London: Griffin

Kraitchik M. 1960. Mathematical Recreations. London: George Allen& Unwin

Schuh F. 1968. The Master Book of Mathematical Recreations. New York: Dover

Pickover C A. 1995. The Pattern Book. World Scientific

Pickover C A. 1999. Computers and the Imagination. N. Y.: ST. Martin's Pr.

Ribenboim P. 2004. The Little Book of Bigger Primes(2nd edition). Berlin: Springer

Schroeder M R. 1984. Number Theory in Science and Communication. Berlin: Springer

Smith D E. 1951. History of Mathematics. N. Y.: Dover

Spencer D D. 1982. Computers in Number Theory. Computer Science Pr.

Stein S K. 1996. Strength in Numbers-Discovering the Joy and Power of Mathematical in Everyday Life. NewYork: John Wiley & Sons. (中译本:严子谦,严磊. 2000. 数字的力量——揭示日常生活中数学的乐趣和威力. 长春:吉林人民出版社)

Steinhaus H. 1960. Mathematical Snapshots. New York: Oxford Univ. Pr.

Wells D. 1987. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Harmondsworth: Penguin

Yan S Y. 2002. Number Theory for Computing (2nd edition). Springer

数 学 网 站

http://www.yahoo.com/Science/Mathematics

http://daisy.uwaterloo.ca/~alopez-o/math-faq/math-faq.html

http://e-math.ams.org

http://www.siam.org

http://netlib2.cs.utk.edu/master

http://www.netlib.org/liblist.html

http://gams.cam.nist.gov

http://www.nag.co.uk:70

http://www.math.hmc.edu/codee/home.html

http://www.ima.umn.edu

http://cam.cornell.edu/ädriscoll/research/drums.html

http://www.utm.edu:80/departments/math/largest.html

http://www.geom.umn.edu/docs/snell/chance/sources.html

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/julia/explorer.html

http://nyjm.albany.edu:8000/nyjm.html

http://www.math.scarolina.edu/~wavelet

http://www.math.ohio-state.edu/JAT

http://ejc.math.gatech.edu:8080/Journal/ejc-wce.html

gopher://gopher.maa.org

gopher://ejde.math.unt.edu

ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/numberfields

ftp://netlib.att.com/netlib/att/math/index.html.Z